8.3 Lista # 21 - Distribuição Normal Bivariada

1. Suponha que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm uma distribuição normal bivariada e que $Var(X_1) = Var(X_2)$. Mostre que a soma $X_1 + X_2$ e a diferença $X_1 - X_2$ são variáveis aleatórias independentes.

2. Suponha que X_1 e X_2 têm distribuição normal bivariada, sendo que $E(X_1|X_2) = 3,7 - 0,15X_2$, $E(X_2|X_1) = 0,4 - 0,6X_1$ e $Var(X_2|X_1) = 3,64$. Encontre:

   (a) A média e a variância de X_1;
   Resp.: $\mu_1 = 4, \sigma_1 = 1$

   (b) A média e a variância de X_2;
   Resp.: $\mu_2 = -2, \sigma_2 = 2$

   (c) A correlação de X_1 e X_2.
   Resp.: $-0,3$

3. Seja $f(x_1, x_2)$ a função de densidade de probabilidade de uma distribuição normal bivariada. Mostre que seu valor máximo é atingido no ponto $x_1 = \mu_1$ e $x_2 = \mu_2$

4. Suponha que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 tem uma distribuição normal bivariada e que duas outras variáveis aleatórias sejam definidas como:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_1 \end{aligned}$$

   onde
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

   Mostre que Y_1 e Y_2 têm distribuição normal bivariada.

5. Suponha que uma variável aleatória X tenha uma distribuição normal e que para todo xe e a distribuição condicional de uma outra variável aleatória Y dado $X = x$ é uma distribuição normal com médica $ax + b$ e variância τ^2, onde a, b e τ são constantes. Prove que a distribuição conjunta de X e Y é uma distribuição normal bivariada.

6. Sejam $X_1, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d., tendo distribuição normal com média μ e variância σ^2. Defina a média amostral $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Neste problema, desejamos encontrar a distribuição condicional de X_i dado $\bar{X}_n$

   (a) Mostre que X_i e $\bar{X}_n$ têm uma distribuição normal bivariada, ambas com média μ, variâncias σ^2 e σ^2/n, respectivamente e correlação $1/sqrtn$;
   Dica: seja $Y = \sum_{j \neq i} X_j$. Mostre agora que Y e X_i são normais independentes, e que $\bar{X}_n$ e X_i são combinações lineares de Y e X_i.

   (b) Mostre que a distribuição condicional de X_i dado $\bar{X}_n = \bar{x}_n$ é uma normal com média $\bar{x}_n$ e variância $\sigma^2(1 - 1/n)$;

7. Suponha que X tenha uma distribuição normal padrão e que a distribuição de Y dado X seja uma distribuição normal com média $2X - 3$ e variância 12. Determine a distribuição marginal de Y e o valor de $\rho(X, Y)$.
   Resp.: $Y \sim N(\mu = -3, \sigma^2 = 16, \rho(X, Y) = 1/2$

8. Suponha que X_1 e X_2 tenham uma distribuição normal bivariada, com $E(X_2) = 0$. Determine $E(X_1^2 X_2)$

9. Suponha que X_1 e X_2 têm distribuição normal bivariada com média μ_1 e μ_2, variâncias σ_1^2 e σ_2^2, correlação ρ. Determine a distribuição de $X_1 - 3X_2$

10. Num certo instante de tempo, as taxas de juros de 30 e 60 dias têm, conjuntamente, uma distribuição normal bivariada com médias 16% e 16.8% ao ano, e desvios padrões 4% e 5% ao ano respectivamente. A correlação entre as taxas é 0,90. Calcule:

    (a) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18%.

    (b) A probabilidade da taxa de 60 dias estar entre 14% e 18%.

    (c) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 22%.

    (d) A probabilidade da taxa de 30 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 15%.

    (e) A probabilidade da taxa de 60 dias estar entre 14% e 18% sabendo que a taxa de 30 dias está hoje em 18%.

11. Fez-se uma pesquisa de preços de roupas masculinas num shopping center. Uma amostra dos produtos existentes revela que o preço das calças é uma variável normal com média $R\$80$ e desvio padrão $R\$30$. O preço das camisas é, por sua vez, uma variável normal com média $R\$60$ e desvio padrão $R\$25$. A correlação entre os preços de calças e camisas é $0,6$. Calcule as seguintes probabilidades:

    (a) De um par de calças custar entre $R\$60$ e $R\$95$.

    (b) De um par de calças custar entre $R\$60$ e $R\$95$ sabendo que uma camisa custa $R\$75$ nesta loja.

    (c) De um par de calças custar entre $R\$60$ e $R\$95$ sabendo que uma camisa custa $R\$50$ nesta loja.

    (d) Qual é a distribuição condicional dos preços das camisas sabendo que o preço das calças é $R\$100$?