


Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Gráficos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



Roteiro da apresentação

- 1 Qualidade na empresa
- 2 Fundamentos de CEP
- 3 Gráfico por variáveis
- 4 Capacidade do processo
- 5 Gráficos por atributos
- 6 Gráficos com autocorrelação
- 7 Outras técnicas
- 8 Referências Bibliográficas


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Gráficos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



Outras técnicas

Gráfico de Controle de CUSUM e de EMWA


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Gráficos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



Monitoramento da Média

- Além da simplicidade, os gráficos de Shewhart são imbatíveis para detecção de grandes desvios da média do processo, ou de aumentos significativos da variância;
- Entretanto, perdem eficiência em processos mais robustos (interferência menos profunda de causas especiais);
- Em processos sujeitos a pequenas perturbações, são indicados gráficos em que a decisão é baseada em diversas amostras e não apenas na última delas. São eles:
 - gráfico de controle de somas acumuladas
 - gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EMWA)

- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Gráficos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



Outras técnicas

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de Controle de CUSUM



Características do Gráfico

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Usa informações acumuladas dos desvios de \bar{X} , através de:

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0),$$

onde \bar{X}_j : média da j-ésima amostra.

- Comportamento:
 - enquanto a μ permanecer ajustada, S_i oscilará aleatoriamente em torno de 0;
 - Se μ deslocar, a estatística S_i crescerá (ou decrescerá) indefinidamente.



Exemplo

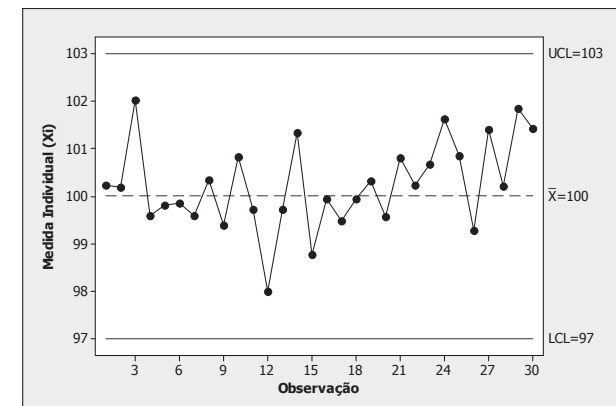
Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Simulação de pequeno deslocamento de média em carta com 30 valores individuais, com:
- Dados da Simulação:

$$X_i \sim N(100, 1), \quad i = 1, \dots, 20$$
$$X_i \sim N(101, 1), \quad i = 21, \dots, 30$$



Gráfico de Controle de X



$$LSC_X = 100 + 3 \times 1 = 103,0$$
$$LIC_X = 100 - 3 \times 1 = 97,0$$

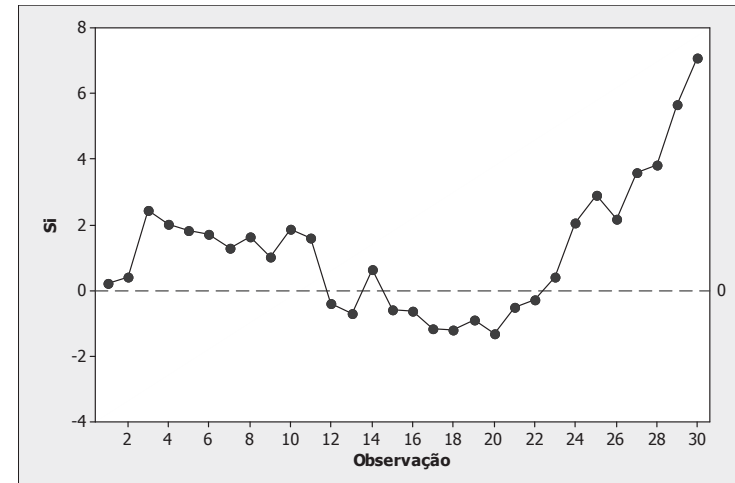
Valores de X_i e das Somas Acumuladas S_i

$\mu_0 = 100$

Obs.	X_i	$X_i - 100$	S_i
1	100,23	0,23	0,23
2	100,19	0,19	0,42
3	102,02	2,02	2,44
4	99,59	-0,41	2,03
5	99,81	-0,19	1,84
6	99,86	-0,14	1,70
7	99,60	-0,40	1,30
8	100,35	0,35	1,65
9	99,38	-0,62	1,03
10	100,83	0,83	1,86
11	99,73	-0,27	1,59
12	98,00	-2,00	-0,41
13	99,72	-0,28	-0,69
14	101,34	1,34	0,65
15	98,77	-1,23	-0,58
16	99,94	-0,06	-0,64
17	99,47	-0,53	-1,17
18	99,95	-0,05	-1,22
19	100,33	0,33	-0,89
20	99,57	-0,43	-1,32
21	100,82	0,82	-0,50
22	100,23	0,23	-0,27
23	100,68	0,68	0,41
24	101,64	1,64	2,05
25	100,86	0,86	2,91
26	99,28	-0,72	2,19
27	101,41	1,41	3,60
28	100,21	0,21	3,81
29	101,85	1,85	5,66
30	101,43	1,43	7,09

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$$

Gráfico das Somas Acumuladas



Análise dos Gráficos

- O gráfico de \bar{X} não detectou o deslocamento de 100 para 101;
- A estatística S cresceu indefinidamente a partir de $n = 20$;
- O gráfico de CUSUM, além de sinalizar o desajuste, informa quando este ocorreu;
- Ele não sinaliza os desajustes de imediato, pois, baseia-se no histórico do processo.
- Para grandes desajustes, o gráfico de \bar{X} é sempre mais ágil.

Algoritmo CUSUM

- Para $n = 1$ o algoritmo é dado por:

$$S_i^+ = \max\{0, X_i - (\mu_0 + d) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0, (\mu_0 - d) - X_i + S_{i-1}^-\}$$

onde,

X_i : i -ésima observação do processo;

$$S_0^+ = S_0^- = 0$$

- O algoritmo produz um sinal sempre que S_i^+ ou $S_i^- > K$
- Parâmetros comumente adotados :
 $K = 5\sigma_0$ e $d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$, em que
 $|\mu_1 - \mu_0|$: deslocamento que se quer detectar.

Algoritmo CUSUM

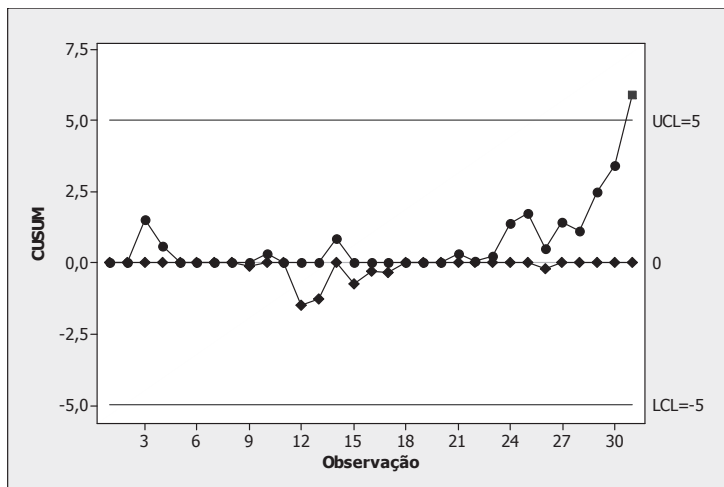
$\mu_0 = 100$
 $\sigma_0 = 1$
 $\mu_1 = 101$
 $K = 5,000$
 $d = 0,500$ ($5\sigma_0$)

$$S_i^+ = \max\{0, X_i - (100 + 0,5) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0, (100 - 0,5) - X_i + S_{i-1}^-\}$$

Obs.	X_i	$X_i - 100,5$	S_i^+	N^+	$99,5 - X_i$	S_i^-	N^-
1	100,23	-0,27	0,00	0	-0,73	0,00	0
2	100,19	-0,31	0,00	0	-0,69	0,00	0
3	102,02	1,52	1,52	1	-2,52	0,00	0
4	99,59	-0,91	0,61	2	-0,09	0,00	0
5	99,81	-0,69	0,00	0	-0,31	0,00	0
6	99,86	-0,64	0,00	0	-0,36	0,00	0
7	99,60	-0,90	0,00	0	-0,10	0,00	0
8	100,35	-0,15	0,00	0	-0,85	0,00	0
9	99,38	-1,12	0,00	0	0,12	0,12	1
10	100,83	0,33	0,33	1	-1,33	0,00	0
11	99,73	-0,77	0,00	0	-0,23	0,00	0
12	98,00	-2,50	0,00	0	1,50	1,50	1
13	99,72	-0,78	0,00	0	-0,22	1,28	2
14	101,34	0,84	0,84	1	-1,84	0,00	0
15	98,77	-1,73	0,00	0	0,73	0,73	1
16	99,94	-0,56	0,00	0	-0,44	0,29	2
17	99,47	-1,03	0,00	0	0,03	0,32	3
18	99,95	-0,55	0,00	0	-0,45	0,00	0
19	100,33	-0,17	0,00	0	-0,83	0,00	0
20	99,57	-0,93	0,00	0	-0,07	0,00	0
21	100,82	0,32	0,32	1	-1,32	0,00	0
22	100,23	-0,27	0,05	2	-0,73	0,00	0
23	100,68	0,18	0,23	3	-1,18	0,00	0
24	101,64	1,14	1,37	4	-2,14	0,00	0
25	100,86	0,36	1,73	5	-1,36	0,00	0
26	99,28	-1,22	0,51	6	0,22	0,22	1
27	101,41	0,91	1,42	7	-1,91	0,00	0
28	100,21	-0,29	1,13	8	-0,71	0,00	0
29	101,85	1,35	2,48	9	-2,35	0,00	0
30	101,43	0,93	3,41	10	-1,93	0,00	0
31	103,00	2,50	5,91	11	-3,50	0,00	0

Gráfico de Controle CUSUM



Funcionamento do Algoritmo

- O aumento de S_i^+ indica **aumento** na média do processo;
- O valor de d serve para evitar que o risco α seja elevado, pois somente valores de $X_i > \mu_0 + d$ é que incrementam S_i^+
- S_i^+ é limitado para valores positivos ou nulos para evitar seu decréscimo indefinido;
- S_i^- comporta-se de maneira similar a S_i^+ , mas seu aumento indica **redução** da média do processo;
- Não serão sinalizados deslocamentos abaixo de d ($|\mu_1 - \mu_0| < |d|$).
- Contadores (N^+ e N^-): indicam o momento de alteração da média. N^+ é zerado sempre que $S_i^+ = 0$ (idem para N^-).

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Comentários

- O $S_{31} > K$ sinalizou alteração da média;
- O instante da alteração é dado por $31 - N_{31}^+ = 20$
- A estimativa da magnitude do deslocamento da média é dada por:

$$\bar{\delta} = \begin{cases} d + \frac{S_i^+}{N_i^+} & , \text{se } S_i^+ > K \\ -d - \frac{S_i^-}{N_i^-} & , \text{se } S_i^- > K \end{cases}$$

- No exemplo S_{31}^+ sinaliza alteração de $\bar{\delta} = 0,5 + 5,91/11 = 1,04$.
- O deslocamento simulado foi $\delta = 2d = 1$.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Escolha do valor de K

- K é ajustado conforme valor de d , para manter $NMA = 370$;
- Para K fixo, ao variar-se d , altera-se a frequência de alarmes falsos;
- Não há expressão simples que relacione α com K para determinado valor de d ;
- Recomenda-se adotar $K = 5\sigma_0$, que dá bons resultados para $0,6\sigma_0 \leq |\mu_1 - \mu_0| \leq 1,6\sigma_0$.



Gráfico de \bar{X} vs. Algoritmo CUSUM

Número médio de amostras até o sinal (NMA)					
$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_0/\sqrt{n}}$	Gráf. \bar{X}	Algoritmo CUSUM, com $K = k\sigma_0/\sqrt{n}$ e $d = \delta\sigma_0/\sqrt{n}$			
	$k = 3$	$k = 8,010$ $\delta = 0,25$	$k = 4,774$ $\delta = 0,5$	$k = 3,339$ $\delta = 0,75$	$k = 2,517$ $\delta = 1,0$
0	370	370	370	370	370
0,2	308	116	164	206	239
0,4	200	40,4	54,5	77,8	105
0,6	120	22,2	24,6	33,5	46,8
0,8	71,6	15,1	14,4	17,6	23,6
1,0	43,9	11,4	9,93	10,9	13,6
1,2	27,8	9,18	7,52	7,62	8,79
1,4	18,3	7,69	6,06	5,80	6,38
1,6	12,4	6,63	5,08	4,68	4,81
1,8	8,69	5,84	4,38	3,92	3,89
2,0	6,30	5,22	3,86	3,39	3,26
3,0	2,00	3,48	2,49	2,09	1,86
4,0	1,19	2,67	1,96	1,55	1,32



Comparação com Gráfico de \bar{X}

- A medida que d diminui, o CUSUM detecta pequenos desajustes mais rapidamente.
- Para grandes desvios da média, o gráfico de \bar{X} sinaliza mais rapidamente que o CUSUM;
- Generalização do algoritmo:
Para $n > 1$, substituir X_i por \bar{X}_i de maneira que:

$$S_i^+ = \max\{0, \bar{X}_i - (\mu_0 + d) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0, (\mu_0 - d) - \bar{X}_i + S_{i-1}^-\}$$

comparando com: $K = 5\sigma_0/\sqrt{n}$;

- Para gráfico de \bar{X} é vantajoso usar $n > 1$, com o algoritmo CUSUM, nem sempre.



CUSUM com Resposta Inicial Rápida

- Após a intervenção, não se tem certeza se todas as causas especiais foram eliminadas.
- Neste caso, no reinício do processo, o algoritmo CUSUM sinalizará o problema tardiamente;
- O artifício de Resposta Rápida Inicial (RIR) recomeça o monitoramento com:

$$S_0^+ = S_0^- = \frac{K}{2}$$

- Se o processo estiver fora de controle,
 $NMA_{RIR} \approx 60\%NMA_{s/RIR}$, para deslocamentos $\geq 2d$.



Outras técnicas

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de Controle de EMWA

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Características do Gráfico

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Outra alternativa ao gráfico de Shewhart para detectar pequenos deslocamentos na média do processo;

- Plotam-se os valores da estatística:

$$Y_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}$$

com $0 < \lambda \leq 1$ e $Y_0 = \mu_0$

- Seu desempenho é similar ao do gráfico CUSUM e também é geralmente utilizado com *observações individuais*.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Construção do Gráfico

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Parâmetros do Estimador:

$$E(Y_i) = \mu_0$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \sigma^2$$

- Limites 3σ :

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$LM = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

- Quando i cresce, $[1 - (1 - \lambda)^{2i}] \rightarrow 1$, logo os limites tendem para $\mu_0 \pm k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}}$.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Exemplo

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Simulação de pequeno deslocamento de média em carta com 30 valores individuais, com:

- Dados da Simulação:

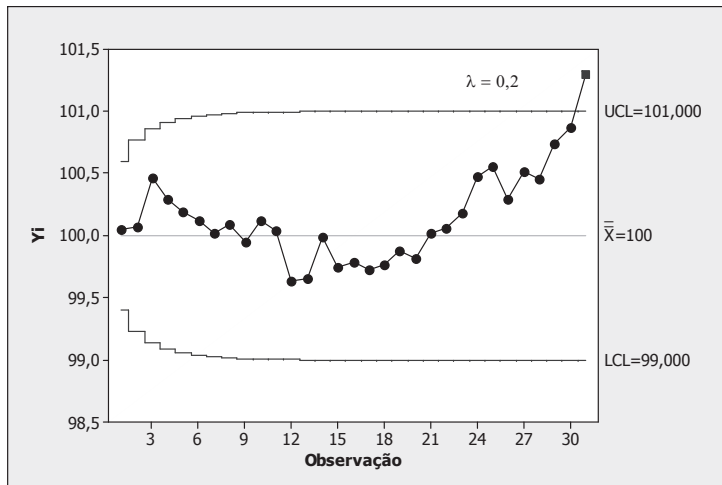
$$X_i \sim N(100, 1), \quad i = 1, \dots, 20$$

$$X_i \sim N(101, 1), \quad i = 21, \dots, 30$$

- Gráfico de EMWA construído com $\lambda = 0,20$ e $k = 2,859$.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

Gráfico de Controle EWMA



Comentários sobre o Gráfico

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Até $n = 20$ ($\mu = \mu_0$), Y_i oscila em torno da linha média.
Após $\mu = \mu_1$, Y_i se afasta gradualmente da linha média;
- Y_i crescerá (ou decrescerá) até atingir o novo valor da média (no exemplo, 101) e passará a oscilar em torno da mesma

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 ↺

Gráfico de \bar{X} vs. Gráfico EWMA

	Número médio de amostras até o sinal (NMA)			
	Gráfico \bar{X}	Gráfico de Controle EWMA		
$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$\lambda = 1,00$ $k = 3,000$	$\lambda = 0,10$ $k = 2,701$	$\lambda = 0,20$ $k = 2,859$	$\lambda = 0,50$ $k = 2,978$
0	370	370	370	370
0,2	308	123	162	238
0,4	200	41,2	55,4	106
0,6	120	20,9	25,3	49,6
0,8	71,6	13,4	14,6	26,0
1,0	43,9	9,74	9,80	15,2
1,2	27,8	7,64	7,27	9,88
1,4	18,3	6,30	5,77	6,96
1,6	12,4	5,38	4,78	5,23
1,8	8,69	4,70	4,10	4,15
2,0	6,30	4,18	3,59	3,42
3,0	2,00	2,76	2,31	1,85
4,0	1,19	2,14	1,81	1,30

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 ↺

Valor de λ

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Gráficos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Para menores valores de λ , o gráfico detecta desajustes maiores mais rapidamente (λ pequeno faz com que os dados históricos tenham maior peso);
- Para $\lambda = 1$ é o gráfico de Shewhart (dados histórico sem nenhuma influência);
- Para $\lambda = 0$, o peso de qualquer observação será nulo ($Y_i = Y_0 = \mu_0$);
- Para uso do gráfico com $n > 1$, deve-se substituir X_i por \bar{X}_i e σ_0 por $\sigma_0 \sqrt{n}$.

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 ↺

Referências bibliográficas

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis






Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

-  COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. e CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas, 2004.
-  MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. 4a. Edição LTC, 2004.
-  WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.
-  WERKEMA, M. C. C. *Avaliação da qualidade de medidas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1996.
-  DERMAN, C. and ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, 1997.



Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

