


# Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Processos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



# Roteiro da apresentação

- 1 Qualidade na empresa
- 2 Fundamentos de CEP
- 3 Gráfico por variáveis
- 4 Capacidade do processo
- 5 Gráficos por atributos
- 6 Processos com autocorrelação
- 7 Outras técnicas
- 8 Referências Bibliográficas


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Processos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



# Processos com autocorrelação

## *Gráficos de Controle para Processos Autocorrelacionados*


- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Processos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



# Gráfico de Controle de Shewhart

- Hipóteses do gráfico de controle convencional:
  - Normalidade e independência da característica de qualidade
- Violações das hipóteses
  - Os gráficos convencionais funcionam razoavelmente bem se a hipótese de normalidade for violado com moderação
  - A violação da hipótese de independência das observações reduz a aplicabilidade dos gráficos convencionais

- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Processos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas



## Processos Correlacionados

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- O risco  $\alpha$  aumenta, comprometendo a credibilidade do gráfico devido a um número elevado de alarmes falsos;
- Os gráficos de controle eram destinados originalmente à indústria de partes discretas (com nenhum ou quase nenhum grau de automação). Nesses processos a condição de independência das observações geralmente é satisfeita;
- Processos contínuos e por bateladas raramente produzem observações independentes;
- Processos discretos altamente automatizados também têm essa característica;



## Correlação

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Coeficiente de correlação entre 2 variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ :

$$\rho_{X,Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Coeficiente de correlação amostral:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$



## Correlação Serial

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- A correlação serial ou autocorrelação entre as observações  $X_i$  e  $X_{i-k}$  é:

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{x})(x_{i-k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- O conjunto de coeficientes de autocorrelação amostrais  $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$  é denominado função de autocorrelação amostral da série de dados  $X$ .



## Exemplo

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Medições sucessivas de temperatura de banho químico, espaçadas em 3 minutos:
  - Valor-alvo:  $225^\circ C$ ;
  - Amostra de tamanho: 150

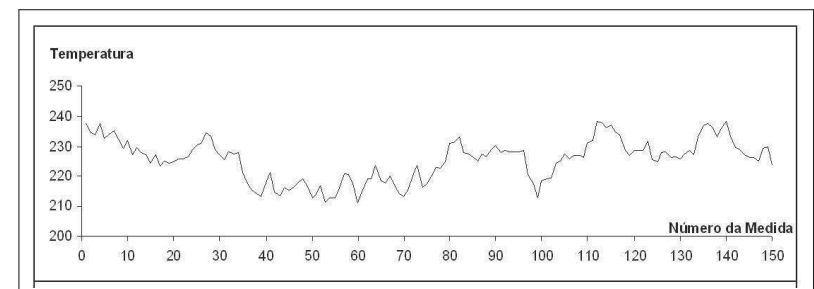


Figura: Série de medidas da temperatura do banho químico



## Autocorrelação das medidas

$k$	$r_k$	$k$	$r_k$
1	0,893	7	0,465
2	0,793	$\vdots$	$\vdots$
3	0,714	15	0,217
4	0,638	16	0,194
5	0,588	$\vdots$	$\vdots$
6	0,527	$\vdots$	$\vdots$

- À medida em que a defasagem aumenta, reduz-se a dependência de  $x_i$  em relação à  $x_{i-k}$ ;
- Nível de correlação suficiente para comprometer o desempenho do gráfico de Shewhart

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

## Comentários

- Motivo da correlação: em intervalos curtos a variação de temperatura não pode ser muito grande (medida acima da média tende a ser seguida por medida acima da média);
- Se o nível médio da característica  $X$  variar em ciclos, podem ocorrer autocorrelações mais altas para defasagens grandes.

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

## Monitoramento da Temperatura com Gráfico $\bar{X}-R$

- Registro de 3 temperaturas espaçadas de 3 minutos a cada 30 minutos:

Amostra	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R$	$\bar{X}$
1	237,59	234,40	233,66	3,93	235,22
2	227,02	229,42	227,65	2,40	228,03
3	225,68	225,70	226,29	0,61	225,89
4	225,17	228,29	227,44	3,12	226,97
5	221,34	214,47	213,71	7,64	216,51
6	213,88	216,78	211,56	5,22	214,07
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	229,08	229,53	229,20	0,45	229,27
19	215,55	221,28	219,07	5,73	218,63
20	229,25	226,33	226,85	3,02	227,44
				$\bar{R} = 3,703$	$\bar{\bar{X}} = 226,085$

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

## Cálculo dos Limites de Controle

- Estimativa da média do processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = 226,085$$

- Estimativa do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{3,703}{1,693} = 2,187$$

- Limites de controle do gráfico de  $\bar{X}$ :

$$LSC_{\bar{X}} = 226,085 + 3 \times 2,187/\sqrt{3} = 229,873$$

$$LM_{\bar{X}} = 226,085$$

$$LIC_{\bar{X}} = 226,085 - 3 \times 2,187/\sqrt{3} = 222,298$$

- Limites de controle do gráfico de  $R$ :

$$LSC_R = (1,693 + 3 \times 0,888) \times 2,187 = 9,531$$

$$LM_R = 3,703$$

$$LIC_R = 0$$

◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶ ◀ ▶

## Resultados

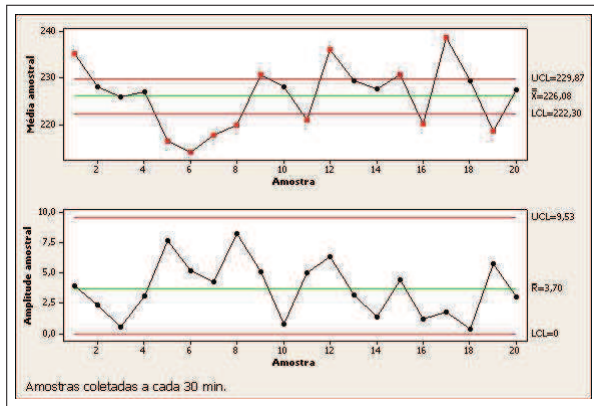


Figura: Monitoramento com amostras de tamanho 3 a cada 30 min.

- O gráfico de  $R$  não sinaliza desajuste do processo;
- Os sinais apontados no gráfico de  $\bar{X}$  indicam a ocorrência de causas especiais?



## Efeitos da Autocorrelação

- Amostras com medidas tomadas em curto espaço de tempo não variam muito;
  - Subestimação de  $\sigma$ :  
Variabilidade dentro da amostra é menor que a do processo (Desvio-padrão das 60 observações: 6,823)
  - Limites de controle demasiadamente estreitos aumentando a proporção de alarmes falsos;
- Motivo:  
Observações correlacionadas da característica da qualidade (dentro da amostra) levam a problemas de alarmes falsos no gráfico de  $\bar{X}$ ;
- Solução:  
Na ausência de ciclos (sazonalidade), observações suficientemente defasadas comportam-se como observações independentes.



## Processos com autocorrelação

### Gráfico de Observações Individuais



## Motivação

- Buscar um método de monitoramento que não subestime o desvio-padrão do processo (evitar limites de controle estreitos);
- Uma solução:
  - Espaçar as medidas por um espaço de tempo suficientemente longo;
  - Amostras individuais, mas com observações não muito espaçadas no tempo.
- Gráficos de  $\bar{X}$  e  $R$  substituídos por:
  - Gráfico de observações individuais ( $X$ );
  - Gráfico de amplitude móvel ( $MR$ ).



## Medidas Individuais

- Medidas da característica de qualidade:  
 $X_i$ : valor da  $i$ -ésima medida da característica;  
 $MR_i = \max\{x_i - x_{i-1}\} - \min\{x_i - x_{i-1}\}$ .
- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:  
A partir de conjunto de  $m$  amostras

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$
$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{MR}}{d_2}, \text{ onde:}$$
$$\bar{MR} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m MR_i, \text{ e}$$
$$d_2 = 1,128$$



## Limites $3\sigma$

- Limites de controle para gráfico de medidas individuais:

$$LSC_X = \hat{\mu}_0 + 3 \hat{\sigma}_0$$
$$LM_X = \hat{\mu}_0$$
$$LIC_X = \hat{\mu}_0 - 3 \hat{\sigma}_0$$

- Limites de controle para gráfico de amplitude móvel:

$$LSC_{MR} = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = 3,687 \hat{\sigma}_0$$
$$LM_{MR} = d_2 \hat{\sigma}_0$$
$$LIC_{MR} = 0$$



## Temperatura de Banho Químico

- Medidas de temperatura a cada 1 hora, quando a autocorrelação é não significativa;

Amostra	$x_i$	$MR$
1	227,02	
2	225,18	1,84
3	213,88	11,30
4	215,31	1,43
5	227,67	12,36
6	232,02	4,35
⋮	⋮	⋮
18	225,92	3,25
19	216,49	9,43
20	227,74	11,25
$\bar{X} = 225,016$		$MR = 7,102$



## Construção do Gráfico

- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = 225,016$$
$$\hat{\sigma}_0 = \frac{7,102}{1,128} = 6,296$$

- Limites de controle para gráfico de medidas individuais:

$$LSC_X = 225,02 + 3 \times 6,296 = 243,90$$
$$LM_X = 225,02$$
$$LIC_X = 225,02 - 3 \times 6,296 = 206,13$$

- Limites de controle para gráfico de amplitude móvel:

$$LSC_{MR} = 3,687 \times 6,296 = 23,20$$
$$LM_{MR} = 7,10$$
$$LIC_{MR} = 0$$



## Gráficos de Controle

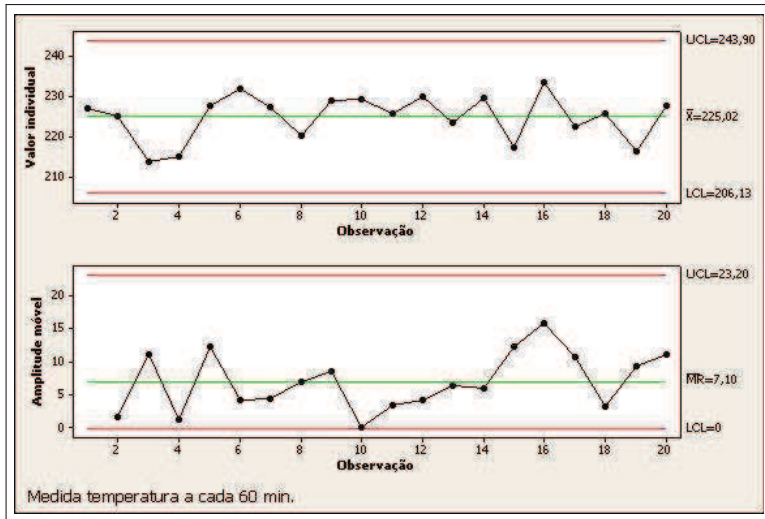


Figura: Monitoramento com medidas individuais a cada 60 min.

## Comentários

- Não há indicação de descontrole do processo. Os pontos fora dos limites do gráfico de  $\bar{X}$  parecem ser alarmes falsos;
- As observações individuais foram espaçadas por um intervalo de tempo suficientemente longo para que o efeito da autocorrelação se dissipasse;
- Gráficos de controle adequados para processos contínuos autocorrelacionados.

## Dissipação da Autocorrelação

Intervalo de tempo mínimo necessário para a dissipação do efeito da autocorrelação:

- Calcular a função de autocorrelação;  
( $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ )
- Verificar o menor valor de  $k$  a partir do qual  $r_k$  é muito pequeno. Costuma-se considerar  $r_k < 0,20$
- Da Tabela 6.3, tem-se que  $r_{16} = 0,1965$  é o primeiro valor em que  $r_k < 0,20$ ;
- Espaçamento:  $16 \times 3 = 48$  minutos. Adotado  $k = 20$ .

## Exemplo 2

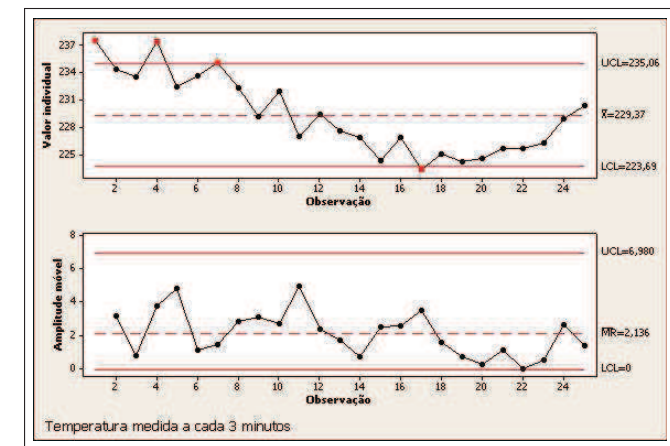


Figura: Monitoramento com medidas individuais a cada 3 min.

- Observações altamente correlacionadas, levando a limites mais estreitos, implicando aumento de alarmes falsos.

## Processos com autocorrelação

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

### Gráfico com Limites Alargados

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## Autocorrelação em Processos Discretos

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

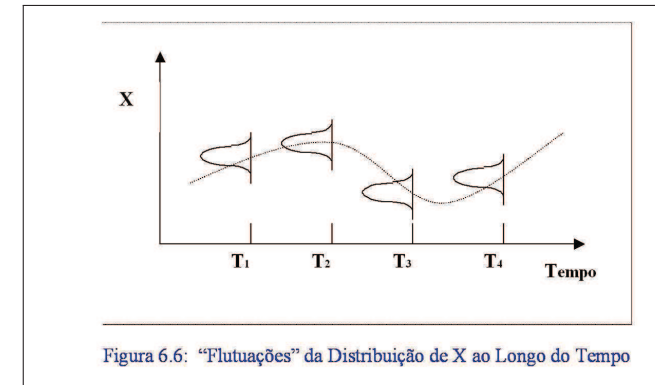


Figura 6.6: “Flutuações” da Distribuição de X ao Longo do Tempo.

- Exemplo: Processo em que o nível médio da característica de qualidade oscila gradualmente (autocorrelação, em longo prazo), com uma variação aleatória de peça para peça (ruído, no curto prazo).

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## Comentários

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- É possível monitorar esses processos com gráficos de  $X$  e  $MR$ , mas eles não permitem monitorar a variabilidade de peça a peça;
- Em certas aplicações, o aumento da variabilidade de peça a peça pode indicar causa especial diferente daquelas que levam a variação excessiva do nível médio do processo.
- Solução: Alargar os limites de controle do gráfico de  $\bar{X}$ , baseando na variabilidade total de  $\bar{X}$  (Variabilidade do nível médio da série e do ruído.)
- Estimativa por medidas diretas:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S_{\bar{X}}}{c_4}$$
$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{i-1} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m-1}}$$

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## Construção dos Gráficos

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Limites  $3\sigma$  para gráfico de  $\bar{X}$ :

$$LSC_X = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$LM_X = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_X = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

- Os limites do gráfico de  $R$  não precisam ser alargados, pois, as flutuações da média do processo não afetam a variabilidade dentro da amostra;
- As amostras podem ser coletadas com qualquer periodicidade e as observações dentro da amostra podem ser itens consecutivos;
- As amostras devem cobrir um período de tempo longo o suficiente para se observar a variabilidade total de  $\bar{X}$ .

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻



## Exemplo 3

Volume de refrigerante em garrafas plásticas  
Valor-alvo: 1000,00 ml

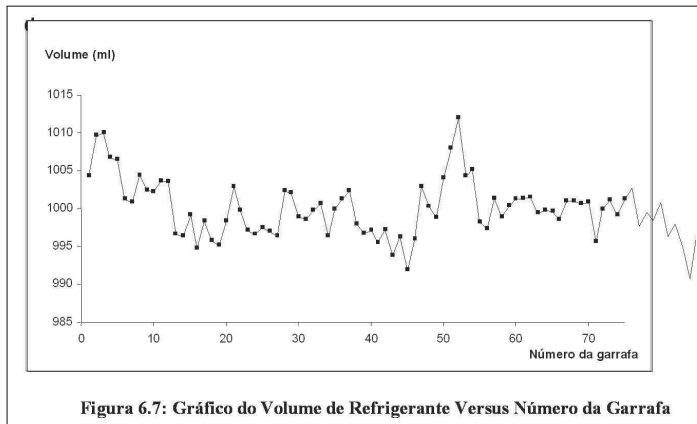


Figura 6.7: Gráfico do Volume de Refrigerante Versus Número da Garrafa

Figura: Flutuações da distribuição de  $X$  ao longo do tempo.

- Processo com forte autocorrelação positiva pra  $k = 1, \dots, 4$  (tabela 6.8).

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

## Monitoramento do Processo

20 amostras espaçadas de 1 hora, com 3 observações cada uma.

$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R$	$\bar{X}$
1	1001,47	1001,60	999,53	2,07	1000,87
2	1001,93	999,45	997,46	6,97	998,11
3	1000,74	1003,44	998,54	4,90	1000,91
4	1005,94	1002,98	998,89	7,06	1002,60
5	1000,85	1003,93	1002,34	3,08	1002,37
6	1000,85	1003,93	1002,34	3,08	1002,37
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	997,59	999,56	1001,75	4,15	999,63
19	1004,45	1008,44	1004,59	3,99	1005,82
20	999,92	997,63	1002,52	4,39	999,86
				$\bar{R} = 3,827$	$\bar{\bar{X}} = 999,685$ $S_{\bar{X}} = 3,314$

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

## Construção do Gráfico

- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = 999,685$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S_{\bar{X}}}{c_4} = \frac{3,314}{0,986934} = 3,357$$

- Limites de controle para gráfico de  $\bar{X}$ :

$$LSC_{\bar{X}} = 999,685 + 3 \times 3,357 = 1009,756$$

$$LM_{\bar{X}} = 999,685$$

$$LIC_{\bar{X}} = 999,685 - 3 \times 3,357 = 989,613$$

- Limites de controle para gráfico de  $R$ :

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3) \frac{\bar{R}}{d_2} = (1,693 + 2 \times 0,888) \frac{3,827}{1,693} = 9,852$$

$$LM_R = 3,827$$

$$LIC_R = 0$$

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

## Gráfico com os Limites Alargados

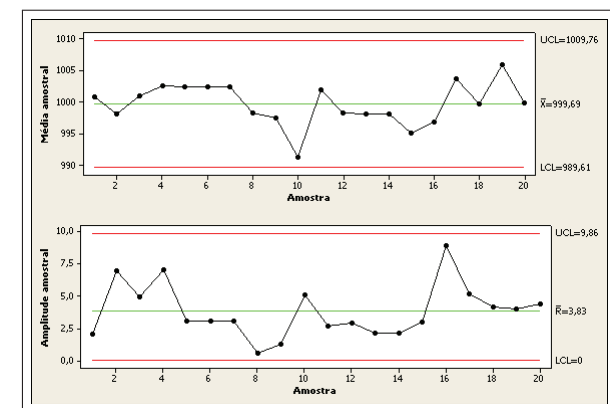


Figura: Gráfico de  $\bar{X}$  com limites alargados e de  $R$ , usuais.

- O monitoramento indica que o processo está sob controle estatístico, sem indicação de causas especiais.

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Processos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas



## Monitoramento com o Gráfico de $\bar{X}$

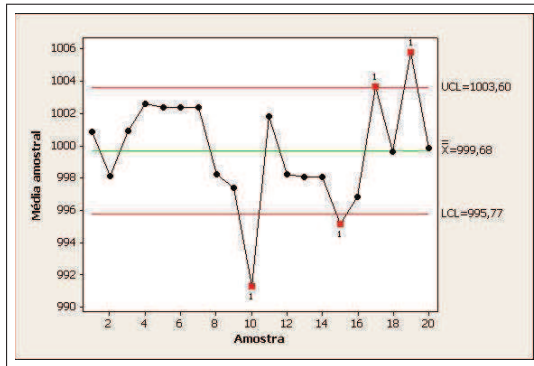


Figura: Gráfico de  $\bar{X}$  com limites usuais.

- Limites de controle usando o estimador usual  $\bar{R}/d_2 = 2,261$
- Vários pontos do gráfico estão fora dos limites. Esses pontos seriam alarmes falsos.



## Referências bibliográficas

- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. e CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas, 2004.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. 4a. Edição LTC, 2004.
- WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.
- WERKEMA, M. C. C. *Avaliação da qualidade de medidas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1996.
- DERMAN, C. and ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, 1997.



## Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística

