

## Gráfico de Controle por Variáveis

---

---

---

---

---

---

---

---

## Roteiro

1. Construção de Gráficos de Controle de  $\bar{X}$  e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos  $\bar{X}$  e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos  $\bar{X}$
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

---

---

---

---

---

---

---

---

## Principais Gráficos de Variáveis

- Gráfico de Média ( $\bar{X}$ )
- Gráfico de Amplitude (R)
- Gráfico de Variância ( $S^2$ )
- Gráfico de Desvio-Padrão (S)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Construção dos Gráficos de Controle $\bar{X}$ e R

---

---

---

---

---

---

---

---

## Variáveis Contínuas

- Para monitoramento de característica de qualidade contínua são usuais:
  - √ Gráfico de Média  $\bar{X}$  :
    - monitorar centralidade do processo
    - ajuste do processo
  - √ Gráfico de Amplitude R:
    - monitorar dispersão do processo
    - estabilidade do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

## Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a variabilidade” (Shewhart);
- Processo sob controle:
  - √ Deseja-se que raramente caia um ponto na região de ação do gráfico
    - depende da abertura do gráfico
  - √ Busca-se não intervir equivocadamente em um processo sob controle
    - Em geral, intervenções desnecessárias geram custos

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$$

- Parâmetros da Média Amostral:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_0$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

✓  $\mu_0$ : média do processo sob controle

✓  $\sigma_0$ : desvio-padrão do processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

- $\mu_0$  e  $\sigma_0$  não conhecidos com precisão absoluta
- Limites de controle estimados:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Escolha da Abertura do Gráfico

- Processo sob controle (estável e ajustado)
  - ✓ Intervalo  $\pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$  engloba 99,73% dos valores de  $\bar{X}$
- Caso algum valor de X caia fora desse intervalo
  - ✓ É mais verossímil que a alteração da média do processo ( $\mu$ ) seja devido a alguma causa especial

---

---

---

---

---

---

---

---

### Amplitude Amostral

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

- Distribuição amostral da amplitude

√ Hipótese:

- população normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$

√  $E(R) = \mu_R = d_2\sigma$

√  $DP(R) = \sigma_R = d_3\sigma$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Amplitude Relativa

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

- Distribuição amostral da amplitude

√ Hipótese:

- população normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$

√  $E(W) = \mu_W = d_2$

√  $\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$

√ Parâmetros dependem apenas do tamanho amostral

√ Distribuição acumulada de W:

- Tabela B

---

---

---

---

---

---

---

---

### Valores de $d_2$ e $d_3$

n	$d_2$	$d_3$
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,763
15	3,472	0,756

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de R

- Limites de Controle (exatos):

$$LSC_R = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = (d_2 + 3d_3)\sigma_0$$

$$LM_R = d_2\sigma_0$$

$$LIC_R = d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 = (d_2 - 3d_3)\sigma_0$$

- Se  $LIC_R < 0$ 
  - √ Adota-se  $LIC_R = 0$
- Quando R for maior que LSCR
  - √ Alarme de aumento do desvio-padrão do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

### Uso dos Gráficos de Controle

- Fases no uso de um gráfico de controle:
  - √ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle
    - testar se o processo estava ou não sob controle quando os m subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas
    - obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2
  - √ Fase 2: Monitoramento da produção futura

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (1)

- Limites de controle obtidos quando são usadas amostras preliminares
  - √ Permitem determinar se o processo estava sob controle durante seleção de m amostras iniciais
- Para testar hipótese de controle do processo no passado:
  - √ Plotar valores de  $\bar{X}$  e R

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (2)

- √ Se todos os pontos caem dentro limites de controle e não se observa comportamento sistemático;
  - Processo está sob controle e limites de controle tentativos são apropriados
- √ Se um ou mais pontos caem na zona de ação do gráfico
  - Procuram-se causas especiais relacionadas com cada ponto na zona de ação dos gráficos
  - Identificada a causa especial, o ponto é descartado e os limites são recalculados
  - Prossegue-se com o procedimento até que todos os pontos caiam dentro dos limites de controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (3)

- √ Se causa especial não é identificada
  - Descarta-se o ponto se houver indícios de que o ponto veio de distribuição característica de processo fora de controle
  - Retém-se os pontos, considerando-se apropriados os limites tentativos  
(Se os pontos representam situação fora de controle, os limites resultantes serão folgados)
- √ Em geral, um ou dois pontos fora de controle não distorcem significativamente os limites de controle
- √ Se amostram futuras futuras ainda indicarem o controle do processo, então os pontos inexplicáveis podem ser seguramente descartados

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (4)

- √ Caso ocorram vários pontos na zona de ação dos gráficos
  - Descarte de todos os pontos pode prejudicar o estabelecimento dos limites de controle  
(Abordagem ignorará informação relevante contida nos dados)
  - É improvável o sucesso na procura da causa atribuível para cada um dos pontos fora de controle
  - Em geral é melhor se concentrar no *padrão* formado por esses pontos  
(Causa atribuível associada ao padrão dos pontos foras de controle é identificada mais facilmente)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Estimativas Iniciais do Processo

- Estimadores dos parâmetros do processo (conjunto inicial de  $m$  amostras)
  - √ Média do processo  $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$  Sensível a desajustes devido causas especiais
  - √ Estimador desvio-padrão do processo  $\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$  Insensível a desajustes devido causas especiais
- Gráfico de R
  - √ Pode ser construído com o processo desajustado
  - √ Em geral, a construção dos gráficos de controle é iniciada pelo Gráfico de R

---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo
  - √ Característica de qualidade: Volume de Sacos de leite:
  - √ Conjunto de dados para estimação inicial:
    - 25 subgrupos racionais de tamanho 5 ( $m = 25$  e  $n = 5$ )
    - Banco de dados: *BD\_CQL.xls/guia: leite*
  - √ Tabela 3.2 (Branco Costa et. al)

X1	X2	X3	X4	X5	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9

- √ Estimação variabilidade do processo sob controle:

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,996}{2,326} = 4,729$$

---

---

---

---

---

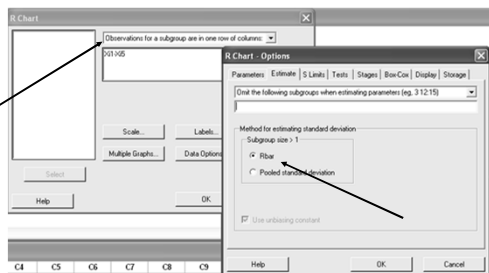
---

---

---

- Construção Gráfico de R das 25 observações

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R




---

---

---

---

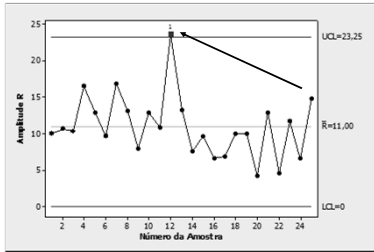
---

---

---

---

- Gráfico de R:



- Estimativas

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2.326 + 3 \times 0.864)4.727 = 23.25$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 11.00$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2.326 - 3 \times 0.864)4.500 = -1.26$$

$$LCL_R = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### 1ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo  
 $\hat{\sigma}_0 = 4,727$
- Amplitude da 12ª amostra é grande  
  - √ Necessária investigação para encontrar justificativa para aumento da variabilidade do processo
- Se for possível diagnosticar causa especial que afetou variabilidade  
  - √ Elimina-se amostra e estima-se novamente  $\sigma_0$ .
  - (Se causa especial influenciou apenas essa amostra)

---

---

---

---

---

---

---

---

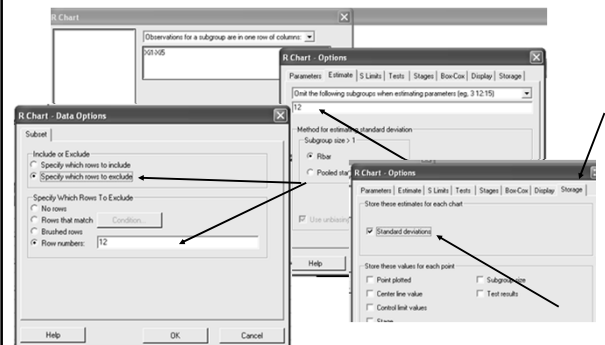
---

---

- Volume de sacos de Leite – Eliminação R<sub>12</sub>

$$\sqrt{m = 24 \text{ e } n = 5}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R




---

---

---

---

---

---

---

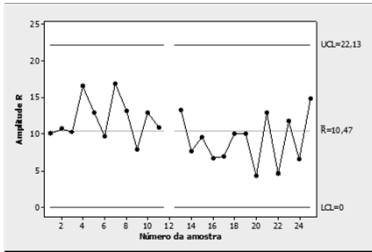
---

---

---



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,500 = 22,13$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 10,467$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,20$$

$$LIC_R = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo  
 $\hat{\sigma}_0 = 4,500$
- A amplitude dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média  
 $\sqrt{\bar{R}/d_2}$  é estimativa confiável do desvio-padrão do processo  
 $\checkmark$  Processo aparenta estar sob controle durante Fase 1

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção do Gráfico de $\bar{X}$

- É afetado por causas especiais que afetam:
  - $\checkmark$  média do processo, ou
  - $\checkmark$  dispersão do processo
- Só pode ser construído com o processo ajustado e estável
  - $\checkmark$  isento de todo tipo de causas especiais
  - $\checkmark$  Nesse caso, preocupação será apenas com estimativa da média do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

- Estimativa dos Parâmetros do Processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

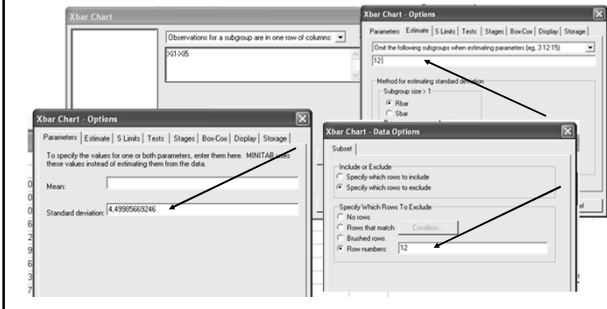
---

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de  $\bar{X}$

$$\sqrt{m = 24; n = 5}$$

$$\sqrt{\text{Estimativas Parâmetros: } \bar{\bar{X}} = 1000,0; \hat{\sigma}_0 = 4,500}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X




---

---

---

---

---

---

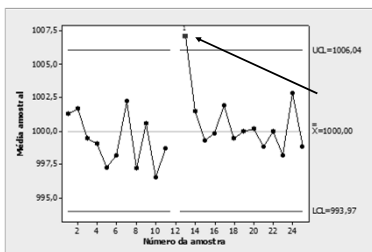
---

---

---

---

- Gráfico de  $\bar{X}$ :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 106,04$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 1000,0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,97$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comentários

- O ponto  $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$
- Comentários similares àqueles efetuados para  $R_{12}$   
 $\checkmark$  Elimina-se  $\bar{X}_{13}$

---

---

---

---

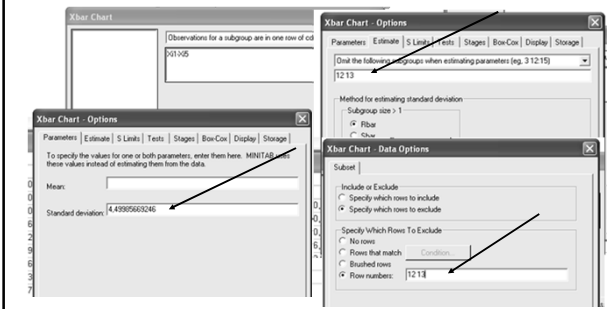
---

---

---

---

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de  $\bar{X}$   
 $\checkmark m = 23; n = 5$   
 $\checkmark$  Estimativas Parâmetros:  $\bar{\bar{X}} = 999,7; \hat{\sigma}_0 = 4,500$   
**Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X**




---

---

---

---

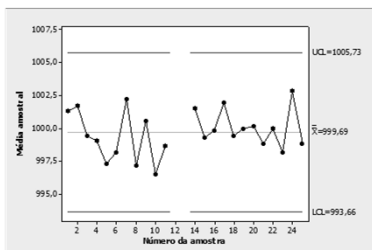
---

---

---

---

- Gráfico de  $\bar{X}$ :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1005,73$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 999,69$$

$$LIC_R = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,66$$

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Comentários:**

- √ As médias dos 23 subgrupos distribuem-se aleatoriamente em torno da média e nenhuma excede os limites de controle
- √ Considera-se o processo ajustado e estável

---

---

---

---

---

---

---

---

**Estimativa dos Parâmetros –  
Recomendações**

- Se identificada a causa especial e seu período de atuação, todas as amostras afetadas devem ser eliminadas
  - √ Mesmo que nem todas estejam na zona de ação
- Se houver poucas amostras restantes após descarte das afetadas
  - √ Prolongar o período de coleta das amostras destinadas à construção dos limites de controle

---

---

---

---

---

---

---

---

- Nem sempre é possível a causa especial que atuou no passado
  - √ É ainda mais difícil saber quais as amostras afetadas
- **Importante:**
  - √ Mesmo com o processo sob controle, há uma maior chance de um ou mais pontos caírem na zona de ação do gráfico, quando houver muitas amostras disponíveis  
(maior que 25 ou 30 subgrupos)

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Recomendação:**

√ Se em uma sequência de 25 ou 30 pontos apenas um estiver fora dos limites de controle e não for possível diagnosticar nenhuma causa especial, o melhor é mantê-lo, construindo o gráfico de controle com base em todas as amostras

---

---

---

---

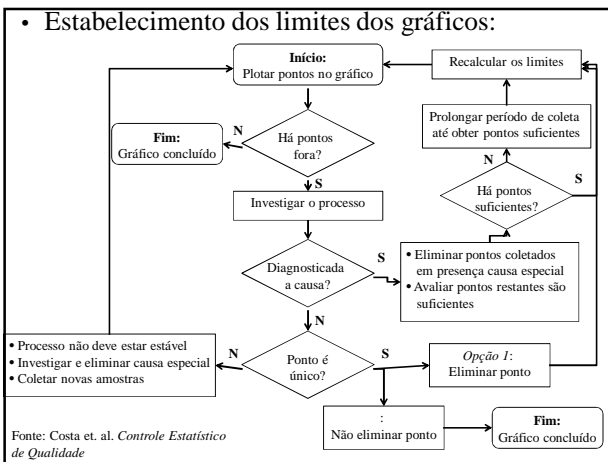
---

---

---

---

• **Estabelecimento dos limites dos gráficos:**




---

---

---

---

---

---

---

---

**Fase 2 – Monitoramento do Processo**

• **Estimação dos parâmetros (fase 1)**

√ só deve ser encerrada quando o processo encontrar-se estável e ajustado

• **Monitoramento do processo (fase 2)**

√ Os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra alterações permanentes

√ Decisão para detecção e eliminação de causa especial  
 – Basta um valor de  $\bar{X}$  ou de R estar na zona de ação para que decida-se pela intervenção no processo

---

---

---

---

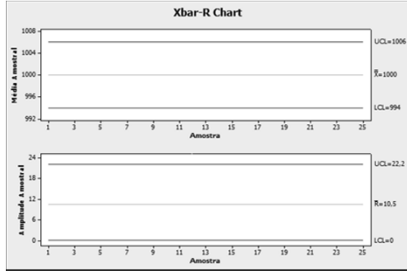
---

---

---

---

- Volume de Sacos de Leites  
√ Gráfico  $\bar{X}$  e R para monitoramento do processo




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites de Controle – Notação Alternativa

- Limites de Controle do Gráfico  $\bar{X}$ :

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{X} + 3 \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{X} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{X} + A_2\bar{R}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 = \bar{X} \quad A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{X} - 3 \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{X} - A_2\bar{R}$$

- Limites de Controle do Gráfico R

$$LSC_R = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = D_4\bar{R} \quad D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$$

$$LM_R = \bar{R} \quad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$$

$$LIC_R = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = D_3\bar{R}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Apêndice VI: Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis

√ Montgomery, pág. 489

Observações de Amostras, n	Gráficos para Médias				Gráficos para Desvios Padrão				Gráficos para Amplitudes								
	Fatores para Limites de Controle				Fatores para Limites de Controle				Fatores para Limites de Controle				Fatores para Limites de Controle				
	A	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	U <sub>L</sub>	U <sub>C</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2333	0	3,267	0	2,606	1,328	0,8805	0,335	0	3,686	0	3,267	0
3	1,732	1,623	1,954	0,8662	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,9807	0,488	0	4,158	0	2,282	0
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0544	0	2,266	0	2,008	2,059	0,4857	0,880	0	4,498	0	2,215	0
5	1,342	0,577	1,427	0,9409	1,0638	0	2,089	0	1,904	2,326	0,4299	0,864	0	4,818	0	2,084	0
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,0030	1,970	0,0209	1,814	2,534	0,3966	0,848	0	5,078	0	1,924	0
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,696	2,704	0,3606	0,833	0,266	5,264	0,678	1,804	0
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,571	2,847	0,3312	0,820	0,388	5,396	0,936	1,664	0
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,764	0,232	1,507	2,970	0,3067	0,808	0,547	5,495	1,184	1,516	0
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,469	3,078	0,2899	0,797	0,687	5,569	1,403	1,371	0
11	0,905	0,285	0,927	0,9734	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,437	3,173	0,2743	0,787	0,811	5,615	1,626	1,244	0
12	0,866	0,266	0,886	0,9736	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,410	3,258	0,2609	0,778	0,922	5,648	1,812	1,127	0
13	0,832	0,249	0,850	0,9734	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,385	3,336	0,2498	0,770	1,025	5,667	1,957	1,019	0
14	0,802	0,235	0,817	0,9730	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,363	3,407	0,2411	0,762	1,118	5,676	2,068	0,914	0
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,344	3,472	0,2340	0,756	1,201	5,741	0,347	1,653	0
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,443	1,326	3,532	0,2281	0,750	1,282	5,762	0,563	1,817	0
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,311	3,588	0,2237	0,744	1,356	5,820	0,738	1,922	0
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,296	3,640	0,2204	0,739	1,424	5,856	0,901	1,968	0
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,283	3,689	0,2171	0,734	1,487	5,901	0,403	1,987	0
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,489	0,504	1,270	3,735	0,2147	0,729	1,549	5,931	0,415	1,985	0
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,521	1,477	0,516	1,259	3,778	0,2124	0,724	1,605	5,951	0,425	1,975	0
22	0,640	0,167	0,647	0,9880	1,0119	0,531	1,466	0,528	1,249	3,819	0,2101	0,719	1,659	5,970	0,434	1,966	0
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,535	1,455	0,539	1,248	3,858	0,2092	0,716	1,710	6,000	0,443	1,957	0
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,535	1,445	0,549	1,249	3,895	0,2087	0,712	1,759	6,031	0,451	1,948	0
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,535	1,435	0,559	1,250	3,931	0,2084	0,708	1,806	6,056	0,459	1,941	0

Para n > 25:

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_1 = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad C_1 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$R_1 = 1 - \frac{3}{c_1\sqrt{2(n-1)}} \quad R_2 = 1 + \frac{3}{c_2\sqrt{2(n-1)}}$$

$$R_3 = c_3 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad R_4 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$


---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Análise de Desempenho dos Gráficos $\bar{X}$ e R

---

---

---

---

---

---

---

---

## Desempenho dos Gráficos de Controle

- Capacidade de detectar perturbações no processo
- É importante para planejamento do gráfico:
  - √ Determinação do plano de amostragem
    - tamanho amostra; intervalo entre amostras
  - √ Estabelecimento dos Limites de Controle
    - abertura do gráfico

---

---

---

---

---

---

---

---

## Teste de Hipóteses

		Decisão		
		Não Rejeitar $H_0$		Rejeitar $H_0$
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I	$\alpha$
F	Erro Tipo II	$\beta$	Decisão Correta	$1 - \beta$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Teste de Hipóteses do Gráfico de $\bar{X}$

- $H_0: \mu = \mu_0$  vs.  $H_1: \mu \neq \mu_0$
- $H_0$ :
  - ✓ Processo em controle
  - ✓ Processo ajustado
  - ✓ Processo centrado no valor-alvo
  - ✓ Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita  $H_0$  toda vez em que  $\bar{X}$  cai fora da zona de ação do gráfico (dentro dos limites de controle)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Erros de Decisão

- Alarme Falso (Erro tipo I)
  - ✓ considerar erroneamente o processo fora de controle
  - ✓ Consequência: intervir na hora errada
- Não detecção (Erro tipo II)
  - ✓ considerar erroneamente o processo em controle
  - ✓ Consequência: não intervir na hora certa

---

---

---

---

---

---

---

---

### Medidas de Desempenho

- Supondo-se que as causas especiais não alterem  $\sigma$ 
  - ✓  $\alpha = P\{\text{Erro tipo I}\}$   
 $\alpha = P(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0)$
  - ✓  $\beta = P\{\text{Erro tipo II}\}$   
 $\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$
  - ✓ Poder do Gráfico de Controle:  $P_d = 1 - \beta$

---

---

---

---

---

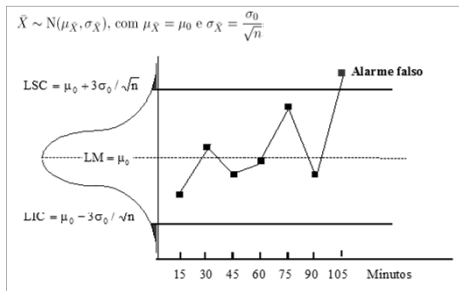
---

---

---



• Gráfico de  $\bar{X}$  – Ocorrência de Alarme Falso




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Alarme Falso**

- Para muitas distribuições,  $\bar{X}$  tenderá para uma Normal mesmo para  $n$  pequeno
- Processo em controle com desempenho  $3\sigma$

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{\frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= P\{|Z| > 3\} \\ &= 0,0027 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Número Médio de Amostras**

$L$ : Quantidade de amostras antes de alarme falso

✓  $L \sim$  geométrica ( $\alpha$ )

$$P\{L = x\} = \alpha(1 - \alpha)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

✓ Número médio de amostras antes de alarme falso

CMS<sub>0</sub>: Comprimento médio da sequência com o processo sob controle

$$CMS_0 = E(L) = \frac{1}{\alpha}$$

✓ Para limites  $3\sigma$ , CMS<sub>0</sub> = 370,4

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

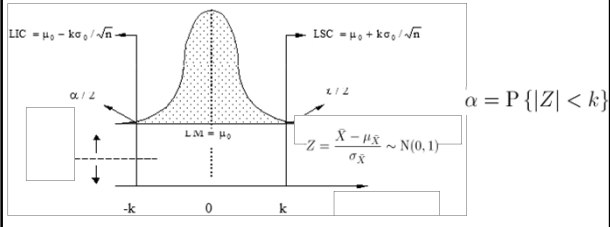
### Influência da Abertura do Gráfico

- Semi-amplitude da região de controle:

$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

√ Diminuição da frequência de alarmes falsos

- adotar  $k > 3$




---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo: Para  $k = 3,10$

√ Risco de alarme falso:

$$\alpha = P\{|Z| < k\} = P\{|Z| < 3,10\} = 0,0019$$

√ Número médio até alarme falso (tempo discreto) :

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0019} = 516,7$$

√ TMA: tempo médio entre alarmes (tempo contínuo)

$$TMA = 516,7 \times h$$

---

---

---

---

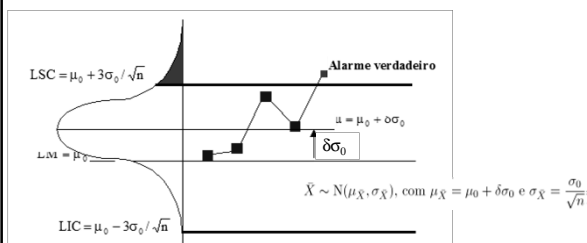
---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$ – Alarme Verdadeiro



√ Processo sob influência de causa especial ( $H_1$  Verdadeira)

o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico

---

---

---

---

---

---

---

---

### Deslocamento da Média

- Sejam

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$$

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$$

- Se  $\delta \geq 1,5$  o valor de  $\bar{X}$  cairá na zona de ação rapidamente
- Se  $\delta < 1,5$  haverá uma certa inércia para a média amostral cair na zona de ação

---

---

---

---

---

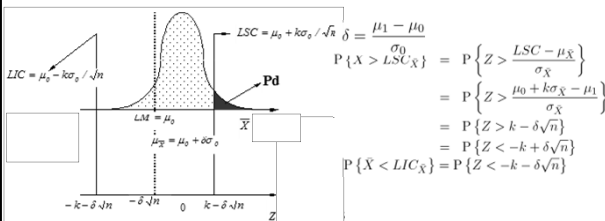
---

---

---

### Poder do Gráfico de $\bar{X}$

$P_d$ : P{um valor de  $\bar{X}$  cair na zona de ação}



$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- No caso em que  $k = 3$ ,  $\delta = 1$  e  $n = 4$

$$P_d = P\{Z < -3 + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -3 - \delta\sqrt{n}\}$$

$$= P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\}$$

$$= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Alarme Verdadeiro

$M$ : Qte. de amostras antes de um alarme verdadeiro

✓  $M \sim$  geométrica ( $P_d$ )

$$P\{M = x\} = P_d(1 - P_d)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

✓ Número médio de amostras para detectar desajuste

-  $CMS_1$ : comprimento médio de sequência com o processo fora de controle

$$CMS_1 = E(M) = \frac{1}{P_d}$$

- Necessárias, em média, 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar deslocamento de 1 desvio-padrão da média

- Necessárias em média 2 amostras de tamanho 9 para perceber o mesmo deslocamento ( $P_d = 0,5$ )

---

---

---

---

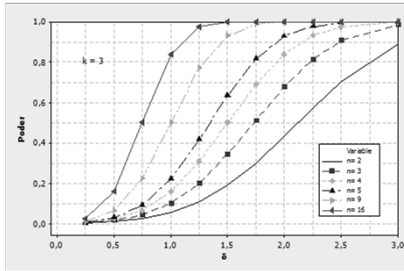
---

---

---

---

### • Curvas de poder vs. deslocamento



**Deslocamento de 1 desvio-padrão**

Amostra	Poder
2	0,06
4	0,159
9	0,50

✓  $n$  não afeta a probabilidade de alarme falso

✓ Tamanho amostral tem grande influência no poder do gráfico de controle (erro tipo II)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Rapidez de Sinalização

NMA: número médio de amostras até o sinal

$$CMS_i = \frac{1}{p_i}$$

✓ Se  $H_0: \mu = \mu_0$  for verdadeira,  $p_0 = \alpha$  e  $CMS_0 = 1/\alpha$

✓ Se  $H_0: \mu = \mu_0$  for falsa,  $p_1 = P_d$  e  $CMS_1 = 1/P_d$

---

---

---

---

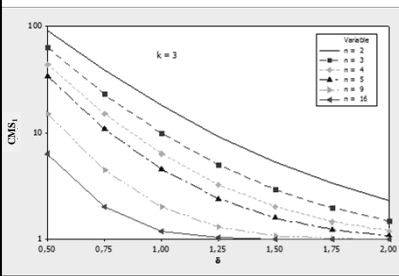
---

---

---

---

• Curvas de  $CMS_1$  vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Tamanho	Qte.
3	10
9	2

√ Deslocamento na média de 1 desvio-padrão

- Em média, para detecção: 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• M: número da amostra que sinaliza o desajuste

√ Para  $\delta = 1,00, n = 4 \rightarrow P\{M=1\} = 0,159$  (Poder)

m	$P\{M=m\}$	$P\{M \leq m\}$
1	0,16	0,16
2	$0,84 \times 0,16$	0,29
3	$0,84^2 \times 0,16$	0,41
4	$0,84^3 \times 0,16$	0,50
5	$0,84^4 \times 0,16$	0,58
6	$0,84^5 \times 0,16$	0,65
7	$0,84^6 \times 0,16$	0,70

---

---

---

---

---

---

---

---

---

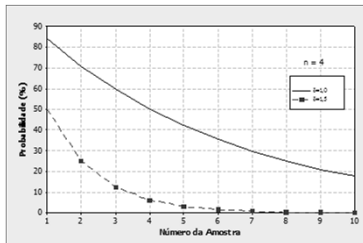
---

---

---

• Curva de Probabilidade de Não-deteção:

√ Probabilidade de, após desajuste, todos os  $i$  primeiros valores de X não caírem na zona de ação do gráfico



√ Velocidade de detecção de desajuste para amostra  $n=4$

- Para  $\delta=1,5$  detecção com 'certeza' até a 7ª. inspeção
- Para  $\delta=1,0$  30% de chance de não ser percebido até 7ª. amostra

---

---

---

---

---

---

---

---

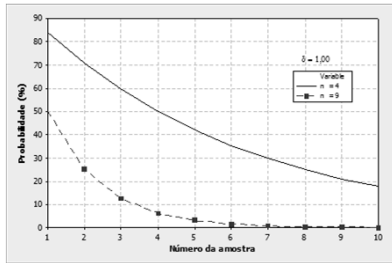
---

---

---

---

- Curva de Probabilidade de Não Detecção para  $\sqrt{\delta} = 1,0$




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Comentários:

- ✓ Deslocamento da média da ordem de  $1,5 \sigma$  será detectado com 'certeza' até a 7ª. amostra.
- ✓ Deslocamento de  $\delta = 1,0$  tem cerca de 30% de probabilidade de não ser percebido até a 7ª. amostra.
- ✓ Os gráficos de  $\bar{X}$  são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ( $\delta > 1,5$ ) e lentos no caso de deslocamentos moderados.
- ✓ Com grandes amostras, os gráficos de  $\bar{X}$  são ágeis na detecção de deslocamentos moderados e lentos no caso de amostras pequenas.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Desempenho do Gráfico de R**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de R

- Limites de controle:

$$LSC_R = d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_R = d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

- Estimativa do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de R

- Hipóteses associadas:

$$\sqrt{H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs. } \sigma \neq \sigma_0}$$

( $\sigma_0$ : desvio-padrão do processo sob controle)

- Medidas associadas

$$\alpha = 1 - P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0)$$

$$\beta = P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma \neq \sigma_0)$$

---

---

---

---

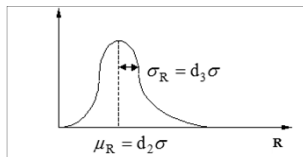
---

---

---

---

### Cálculo de Probabilidades de R



- ✓ A distribuição de R é assimétrica
- ✓ A distribuição de R depende de  $n$  e  $\sigma$
- ✓ A amplitude relativa  $W = R/\sigma$  não depende de  $\sigma$
- ✓ Valores para  $P\{W \leq w_0 | n = n_0\}$  (Tabela B)
  - Hipótese de que X tenha distribuição normal
  - Uso da tabela:  $P\{R < r_0\} = P\left\{W < \frac{r_0}{\sigma}\right\}$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Tabela B

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de R – Alarme Falso

- Processo sob controle e desempenho  $3\sigma$

$$1 - \alpha = P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0, n = n_0\}$$

$$= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\}\sigma_0 \leq R \leq (d_2 + 3d_3)\sigma_0 | n = n_0\}$$

$$= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\} \leq W \leq (d_2 + 3d_3) | n = n_0\}$$

$\sqrt{\alpha} > 0,0027$  (para limites  $3\sigma$ )

$\sqrt{\text{Para } 2 \leq n \leq 6, LIC_R = 0 (d_2 < 3d_3)}$

- Número médio de amostras até alarme falso

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- Risco  $\alpha$  para  $n_0 = 2, 3, 4$  e  $5$

n	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	LIC <sub>R</sub>	LSC <sub>R</sub>	α	CMS <sub>0</sub>
2	1,128	0,853	0	3,69	0,0090	111
3	1,693	0,888	0	4,36	0,0060	167
4	2,059	0,880	0	4,70	0,0050	200
5	2,326	0,864	0	4,92	0,0047	213
6	2,534	0,848	0	5,08	0,0045	222
7	2,704	0,833	0,21	5,20	0,0044	227
10	2,847	0,820	0,69	5,47	0,0041	244

$$LIC_R = \max\{0, d_2 - 3d_3\}$$

$$LSC_R = d_2 + 3d_3$$

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha}$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### Gráfico de R – Poder

$$P_d = P \{ R > LSC_R | n = n_0, \sigma = \sigma_1 \}$$

√ Supondo  $\sigma_1 = 2\sigma_0$

$$P_d = P \left\{ \frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + 3d_3)\sigma_0}{\sigma_1} | n = n_0 \right\}$$

$$= P \left\{ W > \frac{d_2 + 3d_3}{2} | n = n_0 \right\}$$

√ Para  $n = 5$

$$P_d = P \left\{ W > \frac{2,326 + (3)(0,864)}{2} | n = 5 \right\}$$

$$= P \{ W > 2,46 | n = 5 \} = 1 - 0,5904 \approx 0,41$$

---

---

---

---

---

---

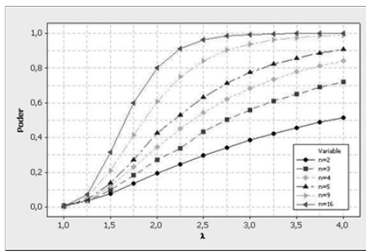
---

---

• Para  $\sigma_1 = \lambda \sigma_0$

$\lambda$ : fator de aumento

$$P_d = P \left\{ W > \frac{d_2 + 3d_3}{\lambda} | n = n_0 \right\}$$



Poder para detectar aumento de 100% ( $\lambda = 2$ ) em  $\sigma$

n	P <sub>d</sub>
2	0,20
5	0,41
16	0,80

---

---

---

---

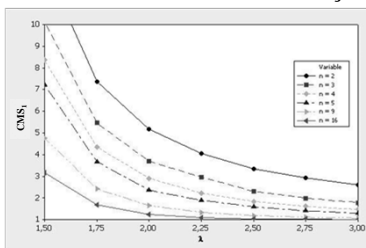
---

---

---

---

• Número médio de amostras até detecção:  $CMS_1 = \frac{1}{P_d}$



$CMS_1$  para detectar aumento de 100% ( $\lambda = 2$ ) em  $\sigma$

n	CMS <sub>1</sub>
2	5
4	3

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites de controle para  $\alpha$  pré-definido:

$$\frac{LIC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{\alpha/2}$$

$$\frac{LSC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{1-\alpha/2}$$

√  $w_{\alpha/2}$ : valor de  $w$ , tal que  $P\{W < w_{\alpha/2}\} = \alpha/2$

√  $LM = d_2 \sigma_0$  (não é afetado)

√ Vantagem: detectar melhorias do processo

- Para  $n = 4$  e  $\alpha = 0,002$ :  $LSC_R = w_{0,999} \hat{\sigma}_0 = 5,30 \hat{\sigma}_0$

$$LIC_R = w_{0,001} \hat{\sigma}_0 = 0,20 \hat{\sigma}_0$$

- Para  $n = 4$  e desempenho  $3\sigma$ :  $LSC_R = 4,70 \hat{\sigma}_0$   
 $\alpha = 0,005$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráficos de Controle $\bar{X}$ e R: Análise do Desempenho Conjunto

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$ e R

- Hipóteses associadas:

√  $H_0: \mu = \mu_0$  e  $\sigma = \sigma_0$

√  $H_1: \mu \neq \mu_0$  e  $\sigma \neq \sigma_0$

- Risco de alarme falso do gráfico de  $\bar{X}$

$$\alpha_{\bar{X}} = 1 - P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0\}$$

- Risco de alarme falso do gráfico de R

$$\alpha_R = 1 - P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\}$$

- Probabilidade conjunta de alarme falso

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}} \alpha_R$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Considerando limites  $3\sigma$  e  $n = 4$ :

$$\alpha_{\bar{X}} = 0,0027 \text{ e } \alpha_R = 0,0050$$

- √ O risco de alarme conjunto é  $\alpha \approx 0,0077$
- √ Número médio de amostras até alarme falso:  
 $CMS_0 \approx 130$  (considerado elevado)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Redução do Risco $\alpha$

- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos
  - √ Alargamento dos limites do gráfico
  - √ Razoável adotar  $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R$   
 (caso não haja informações sobre os desajustes)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo:

√ Com  $\alpha \approx 0,0024$  e  $n = 4$  ( $CMS_0 = 416,7$ )

$$\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012,$$

√ Limites dos gráficos:

- Gráfico de  $\bar{X}$

$$\mu_0 \pm 3,24\sigma_0/\sqrt{4}, \text{ pois } P\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$$

- Gráfico de R

$$LSC_R = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$$

---

---

---

---

---

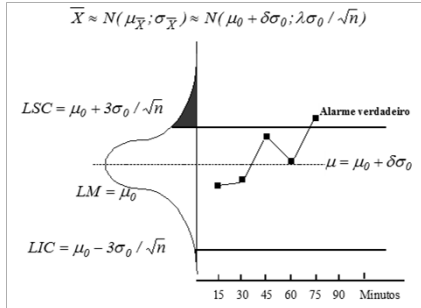
---

---

---

- Desajuste e instabilidade no processo

$$(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$




---

---

---

---

---

---

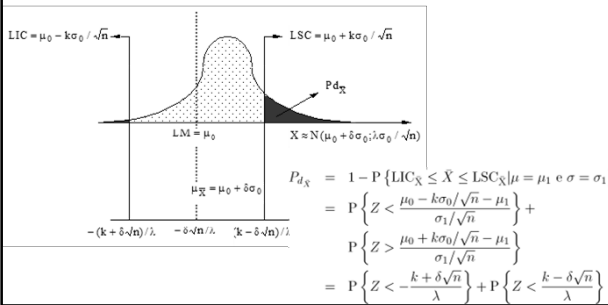
---

---

- Poder do Gráfico de  $\bar{X}$ :

√ para sinalizar desajuste e instabilidade no processo

$$(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$




---

---

---

---

---

---

---

---

- Poder do gráfico de R

√ para sinalizar instabilidade do processo

$$(\sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$

$$P_{d_R} = 1 - P\{R > LSC_R | \sigma = \sigma_1\}$$

$$= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)\sigma_0}{\sigma_1}\right\}$$

$$= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)}{\lambda}\right\}$$

- Poder conjunto dos gráficos  $\bar{X}$  e R

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R}$$

---

---

---

---

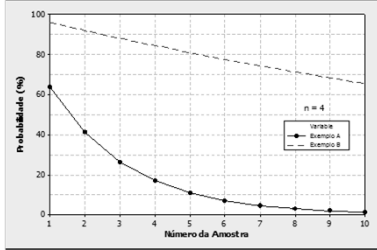
---

---

---

---

- Probabilidade de os gráficos de  $\bar{X}$  e R não terem emitido sinal até a  $i$ -ésima amostra após o desajuste
  - √ As primeiras  $i$  observações caíram dentro dos limites




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comentários

- Exemplo A:
  - √ É quase certo que pelo menos um dos gráficos perceberá as alterações até a 7ª. Amostra
- Exemplo B:
  - √ Há uma probabilidade superior a 60% que até a 10ª. Amostra nenhum dos gráficos perceberá as alterações

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comparação de Poderes

- Planejamento:
  - √  $n = 4$  e  $\alpha_X = \alpha_R = 0,0012$  ( $k=3,24$  e  $LSC_R = 5,25\sigma_0$ )

	A	B (estável)	C (ajustado)	D
	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1$	$\delta = 0$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$
$Pd_X$	0,1484	0,01255	0,1052	0,0309
$Pd_R$	0,2500	$\alpha_R$	0,2500	0,0107
$Pd$	0,3613	0,01374	0,3289	0,0413

- √ B: o gráfico R não é sensível a alterações na média
- √ C: O poder global é reduzido sem o gráfico  $\bar{X}$
- √ D: diminuição do poder global (em comparação a A)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### **Comentário**

- Os gráficos de  $\bar{X}$  e R não são indicados para monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.
  - √ Deve-se recorrer a outros tipos de gráficos
    - CUSUM, EWMA, etc.

---

---

---

---

---

---

---

---

### **Alternativas para Monitoramento da Dispersão**

---

---

---

---

---

---

---

---

### **Monitoramento da Variabilidade**

- O gráfico de R tem sido mais utilizado por sua simplicidade
  - √ Para amostras grandes, o gráfico de  $S^2$  ou de S são mais eficientes
  - √ Para amostras pequenas, o gráfico de R é tão eficiente quanto eles
  - √ A diferença começa a ser sensível para amostras maiores que 10 unidades

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico do Desvio-Padrão S

- Pontos Amostrais:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

√ Distribuição amostral não é tabelada. Pela tabela  $\chi^2$ :

$$P\{S > x\} = P\{S^2 > x^2\}, \text{ com } \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

√ Parâmetros da Estatística:

$$\begin{aligned} \mu_S &= c_4 \sigma \\ \sigma_S^2 &= (1 - c_4^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites 3 $\sigma$  do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 + 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = c_4 \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 - 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

√  $\hat{\sigma}_0$ : valor estimado do desvio-padrão do processo isento de causas especiais

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico do Desvio-Padrão S

- Limites de Controle do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 + 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_6 \hat{\sigma}_0 \quad B_5 = c_4 - 3 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = c_4 \hat{\sigma}_0 \quad B_6 = c_4 + 3 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LIC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 - 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_5 \hat{\sigma}_0$$

- Se  $S_C$  é o estimador de  $\sigma$

$$S_C = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{c_4} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$LSC_S = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_4 \bar{S} \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = \bar{S} \quad B_6 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LIC_S = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \bar{S}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Se  $S_C$  é usado para estimar  $s$ , os limites para os gráficos de  $X$  podem ser definidos como:

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{x} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}} = \bar{x} + A_3 \bar{S} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{x}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{x} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}} = \bar{x} - A_3 \bar{S}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de S

- Limites de controle para risco a pré-determinado

$$P\{S > LSC_S\} = \gamma$$

$$P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 > \frac{n-1}{\sigma_0^2} LSC_S^2\right\} = \gamma$$

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} LSC_S^2 = \chi_{n-1; \gamma}^2$$

$$LSC_S = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \gamma}^2}{n-1}}$$

✓  $\gamma = \alpha/2$  (limites bilaterais) ou  $\gamma = \alpha$  (unilateral)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites de controle – bilateral

$$LSC_S = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \alpha/2}^2}{n-1}}$$

$$LM_S = \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; (1-\alpha/2)}^2}{n-1}}$$

- Limites de controle – unilateral

$$LSC_S = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \alpha}^2}{n-1}}$$

$$LM_S = \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemplo – 4.4/7

- Fabricação de refrigerante:
  - √ Característica de qualidade de interesse:
    - quantidade de CO<sub>2</sub> na bebida
    - valor-alvo:  $\sigma_0 = 0,3$  g CO<sub>2</sub>/l
  - √ Fase 1:
    - $m = 15$  e  $n = 5$
    - Construção de gráfico de S unilateral ( $\alpha = 0,01$  e  $\alpha = 0,05$ )
  - √ Fonte: Tabela 4.4/1, pág. 397, Mittag

---

---

---

---

---

---

---

---

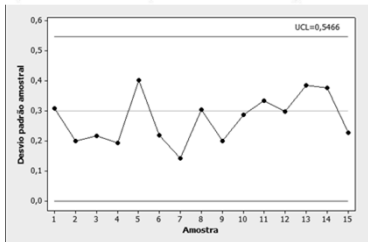
---

---

- Limite superior de controle:

√  $\alpha = 0,01$  (unilateral)

$$LSC_S = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\frac{\chi_{(n-1); \alpha}^2}{n-1}} = 0,3 \sqrt{\frac{\chi_{(5-1); 0,01}^2}{5-1}} = 0,3 \sqrt{\frac{13,2767}{4}} = 0,5466$$



√ O processo aparenta estar sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

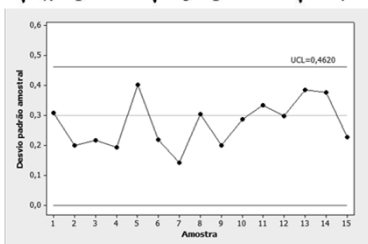
---

---

- Limite superior de controle:

√  $\alpha = 0,05$  (unilateral)

$$LSC_S = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\frac{\chi_{(n-1); \alpha}^2}{n-1}} = 0,3 \sqrt{\frac{\chi_{(5-1); 0,05}^2}{5-1}} = 0,3 \sqrt{\frac{9,4877}{4}} = 0,4620$$



√ O processo aparenta estar sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráficos de R e de S

- Gráficos  $\bar{X} - S$  são preferidos aos  $\bar{X} - R$  quando:
  - √ Amostra moderadamente grande ( $n > 10$ )
    - uso de amplitude para estimar  $\sigma$  perde eficiência ( $n > 10$ )
  - √ Tamanho da amostra é variável
- Disponibilidade atual de microcomputadores tem eliminado dificuldades computacionais na implementação dos gráficos de S

---

---

---

---

---

---

---

---

### Amostra Variável

- Gráficos de  $\bar{X} - S$  com tamanho de amostra variável:

√ Estimção dos parâmetros do processo:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad \bar{S} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right]^{1/2}$$

√ Limites de controle são variáveis (calculados da maneira usual)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo 5.4 – Montgomery

- Diâmetros internos (mm) de anéis de pistão de motores de automóveis:
  - √ Subgrupos coletados para fase 1,  $m = 25$
  - √ Amostras variáveis:
    - $n = 3$  a  $5$
  - √ Média global:
  - √ Desvio médio ponderado:

---

---

---

---

---

---

---

---

- Medida dos diâmetros internos (mm):

i	X <sub>1i</sub>	X <sub>2i</sub>	X <sub>3i</sub>	X <sub>4i</sub>	X <sub>5i</sub>	X <sub>total</sub>	S <sub>i</sub>	n	n X <sub>total</sub>	(n-1) S <sub>i</sub> <sup>2</sup>
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	0,0148	5	370,05	0,000873
2	73,995	73,992	74,001			73,996	0,0046	3	221,98	0,000042
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,0147	5	370,04	0,000870
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,0091	5	370,01	0,000330
5	73,992	74,007	74,015	73,988	74,014	74,003	0,0122	5	370,01	0,000597
6	74,009	73,994	73,997	73,985		73,996	0,0099	4	295,98	0,000295
7	73,995	74,006	73,994	74,000		73,999	0,0055	4	295,99	0,000091
8	73,985	74,003	73,993	74,018	73,988	73,997	0,0123	5	369,98	0,000601
9	74,008	73,995	74,009	74,005		74,004	0,0064	4	296,01	0,000123
10	73,988	74,000	73,990	74,007	73,998	73,998	0,0063	5	369,98	0,000158
11	73,994	73,999	73,994	73,985	73,990	73,994	0,0029	5	369,97	0,000033
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	0,0042	5	370,00	0,000071
13	73,983	74,002	73,998			73,994	0,0100	3	221,98	0,000201
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	0,0153	5	369,95	0,000937
15	74,012	74,014	73,998			74,008	0,0087	3	222,02	0,000152
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996	73,997	0,0078	5	369,98	0,000243
17	73,994	74,012	73,986	74,005		73,999	0,0115	4	295,99	0,000399
18	74,006	74,010	74,018	74,009	74,000	74,007	0,0070	5	370,03	0,000195
19	73,984	74,002	74,003	74,009	73,997	73,998	0,0085	5	369,99	0,000287
20	74,000	74,010	74,018			74,008	0,0068	3	222,02	0,000093
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,996	74,000	0,0122	5	369,98	0,000591
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	0,0074	5	370,00	0,000221
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014	74,002	0,0119	5	370,01	0,000569
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,0087	5	370,02	0,000303
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,988	0,0162	5	369,99	0,001047
<b>Total</b>								<b>113</b>	<b>8362,08</b>	<b>0,009320</b>

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Média global:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{8.362,085}{113} = 74,001$

- Desvio padrão médio ponderado:

$$\bar{s} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{25} (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^{25} n_i - 25} \right]^{1/2} = \left[ \frac{0,009320}{88} \right]^{1/2} = 0,01030$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites de controle para a amostra 1 (n<sub>1</sub> = 5):

√ Gráfico de S:

$$LSC_s = \bar{s} \left( 1 + 3 \sqrt{\frac{1}{c_4^2} - 1} \right) = 0,01030 \left( 1 + 3 \sqrt{\frac{1}{0,940^2} - 1} \right) = 0,02152$$

$$LM_s = \bar{s} = 0,01030$$

$$LIC_s = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Cálculo dos Limites de Controle:

i	n	$\bar{X}_{i-1}$	$S_i$	$LSC_i$
1	5	74,010	0,0148	0,0215
2	3	73,996	0,0046	0,0264
3	5	74,008	0,0147	0,0215
4	5	74,003	0,0091	0,0215
5	5	74,003	0,0122	0,0215
6	4	73,996	0,0099	0,0233
7	4	73,999	0,0055	0,0233
8	5	73,997	0,0123	0,0215
9	4	74,004	0,0064	0,0233
10	5	73,998	0,0063	0,0215
11	5	73,994	0,0029	0,0215
12	5	74,001	0,0042	0,0215
13	3	73,994	0,0100	0,0264
14	5	73,990	0,0153	0,0215
15	3	74,008	0,0087	0,0264
16	5	73,997	0,0078	0,0215
17	4	73,999	0,0115	0,0233
18	5	74,007	0,0070	0,0215
19	5	73,998	0,0085	0,0215
20	3	74,008	0,0068	0,0264
21	5	74,000	0,0122	0,0215
22	5	74,002	0,0074	0,0215
23	5	74,002	0,0119	0,0215
24	5	74,005	0,0087	0,0215
25	5	73,998	0,0162	0,0215

---

---

---

---

---

---

---

---

---

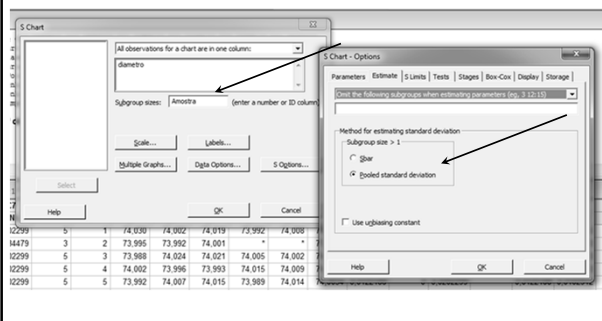
---

---

---

• Gráfico de S – amostra variável

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > S →




---

---

---

---

---

---

---

---

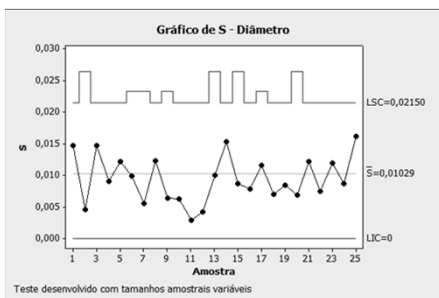
---

---

---

---

• Gráfico de S – Minitab



√ Processo aparenta estar estável

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico da Variância Amostral $S^2$

- Supondo amostra aleatória de população normal:

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- Limites de controle para risco de alarme falso  $\alpha$ :

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$$

$$LM_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1; (1-\alpha/2)}^2$$

$\sqrt{\hat{\sigma}_0^2}$ : estimativa variância de processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fase 1

✓ Coleta de  $m$  subgrupos de tamanho  $n$ , com o processo sob controle estatístico

✓ Estimativa da variância do processo isento de causas especiais:

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m S_i^2}{m}$$

✓ Linha média:  $\bar{S}^2$

✓ Procedimento análogo ao adotado para o gráfico de R  
- Plotagem dos pontos  
- Exame de eventuais pontos fora dos limites de controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Plano amostral:

✓  $n = 5$  e risco de alarme falso  $\alpha = 0,005$

- Limites de controle do gráfico:

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} 16,424 = 4,11 \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{4} 0,145 = 0,04 \hat{\sigma}_0^2$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comparação com o Gráfico de R

- Plano amostral:  $n = 5$  e risco  $\alpha = 0,47\%$

✓ Gráfico de R com limites  $3\sigma$ :

$$LSC_R = 1,92 \sigma_0 \text{ e } LIC_R = 0$$

✓ Gráfico de  $S^2$  (limite inferior descartado):

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} \chi_{(5-1);0,0047}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{4} 15,00 = 3,75 \hat{\sigma}_0^2$$

- Limite superior de controle foi reduzido

---

---

---

---

---

---

---

---

### Parâmetros de $S^2$

- $S^2$ : variância amostral de amostra aleatória de população amostral  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$

✓ Média:  $\mu_{S^2} = \sigma^2$

✓ Variância:  $Var\left[\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S^2\right] = 2(n-1)$   
 $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 Var(S^2) = 2(n-1) \quad \sigma_{S^2} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sigma^2$   
 $Var(S^2) = \frac{2}{n-1} (\sigma^2)^2$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites $3\sigma$

- São dados por:

$$LSC_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2 + 3 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{\sigma}_0^2$$
$$LM_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2$$
$$LIC_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2 - 3 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{\sigma}_0^2$$

✓  $\hat{\sigma}_0^2$ : estimativa variância de processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Poder do Gráfico de S<sup>2</sup>

- Para processo com  $\sigma_1^2 = (\lambda \sigma_0)^2$

$$\begin{aligned} Pd &= P\{S^2 > LSC_{S^2} | \sigma^2 = \sigma_1^2\} \\ &= P\left\{\frac{n-1}{\sigma_1^2} S^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) LSC_{S^2}\right\} \\ &= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\lambda^2 \sigma_0^2}\right) LSC_{S^2}\right\} \end{aligned}$$

√ Para gráficos com limites  $3\sigma$  ou com risco pré-determinado

---

---

---

---

---

---

---

---

√ Poder de gráficos com limites  $3\sigma$ :

$$\begin{aligned} Pd &= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) \hat{\sigma}_0^2 \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]\right\} \\ &= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \frac{n-1}{\lambda^2} \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]\right\} \end{aligned}$$

√ Poder de gráficos S<sup>2</sup> com risco  $\alpha$  pré-determinado:

$$\begin{aligned} Pd &= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2}\right) \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1}\right) \chi_{n-1,\gamma}^2\right\} \\ &= P\left\{\chi_{n-1}^2 > \frac{\chi_{n-1,\gamma}^2}{\lambda^2}\right\} \end{aligned}$$

- Com  $\gamma = \alpha/2$  para limites bilaterais e  $\gamma = \alpha$  para LIC<sub>S<sup>2</sup></sub>=0

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comparação com o Gráfico de R

- Para  $n = 5$  e risco  $\alpha = 0,47\%$ :  
√  $LSC_{S^2} = 3,75 \hat{\sigma}_0^2$
- Poder para detectar desajuste com  $\sigma_1 = 2\sigma_0$ :

$$\begin{aligned} Pd &= P\left\{\chi_{5-1}^2 > \left(\frac{5-1}{2^2}\right) 3,75\right\} \\ &= P\{\chi_4^2 > 3,75\} \\ &= 0,441 \end{aligned}$$

√ Gráfico de R com as mesmas características (n e  $\alpha$ ) oferece um poder de 41%

---

---

---

---

---

---

---

---

## Gráficos de $\bar{X}$ – Regras Suplementares

---

---

---

---

---

---

---

---

### Regras Suplementares

- Em geral, definidas apenas para o gráfico de  $\bar{X}$ 
  - √ Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
  - √ Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;

---

---

---

---

---

---

---

---

### Notação das Regras

- $(L, m, a, b)$ : sinal ocorre quando ao menos  $L$ , dentre os  $m$  últimos pontos, estiverem entre  $\mu_0 + a \sigma_{\bar{X}}$  e  $\mu_0 + b \sigma_{\bar{X}}$
- Regra Básica de Controle;
  - √  $C_1 : (1; 1; k; \infty)$  ou  $(1; 1; -\infty; -k)$ 
    - 1 ponto fora dos limites de controle ( $k = 3$ : limites 3);

---

---

---

---

---

---

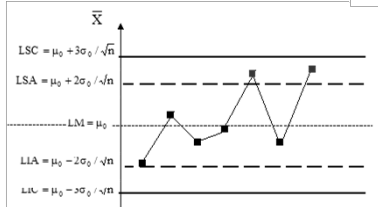
---

---



• Gráfico de  $\bar{X}$  – Regras Suplementares de Decisão

- $C_2: (2;2;2;\infty)$  ou  $(2;2;-\infty;-2)$
- $C_3: (2;3;2;\infty)$  ou  $(2;3;-\infty;-2)$
- $C_4: (3;4;1,6;\infty)$  ou  $(3;4;-\infty;-1,6)$
- $C_5: (8;8;0;\infty)$  ou  $(8;8;-\infty;0)$
- $C_6: (10;10;0;\infty)$  ou  $(10;10;-\infty;0)$




---

---

---

---

---

---

---

---

• Algumas Regras Suplementares:

- ✓  $C_2: (2; 2; 2; \infty)$  ou  $(2; 2; -\infty; -2)$
- ✓  $C_3: (2; 3; 2; \infty)$  ou  $(2; 3; -\infty; -2)$
- ✓  $C_4: (3; 4; 1, 6; \infty)$  ou  $(3; 4; -\infty; -1, 6)$
- ✓  $C_5: (8; 8; 0; \infty)$  ou  $(8; 8; -\infty; 0)$
- ✓  $C_6: (10; 10; 0; \infty)$  ou  $(10; 10; -\infty; 0)$

---

---

---

---

---

---

---

---

**Alarmes Falsos**

- Regras agilizam a detecção de mudanças, mas s diminuem a proteção contra alarmes falsos
  - ✓ risco  $\alpha$  aumenta
- Exemplo:
  - ✓ Alarme sempre que 6 pontos consecutivos caírem em qualquer dos lados da linha média:
    - $0,5^6=0,0313$  (12 vezes o valor de  $\alpha = 0,0027$ ;
- Devem-se alargar os limites de controle para se manter o nível de proteção contra alarmes falsos

---

---

---

---

---

---

---

---

- Frequência de alarmes falsos no gráfico de  $\bar{X}$  com regras suplementares

Regras Utilizadas	Probabilidade de Alarme Falso	Frequência Esperada de Alarmes Falsos
C <sub>1</sub>	0,0027	1 a cada 370,4 inspeções
C <sub>1</sub> e C <sub>2</sub>	0,0036	1 a cada 278,0 inspeções
C <sub>1</sub> e C <sub>3</sub>	0,0044	1 a cada 225,5 inspeções
C <sub>1</sub> e C <sub>4</sub>	0,0035	1 a cada 286,2 inspeções
C <sub>1</sub> e C <sub>5</sub>	0,0065	1 a cada 152,8 inspeções
C <sub>1</sub> e C <sub>6</sub>	0,0037	1 a cada 273,8 inspeções

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Valores de  $k$  que garantem  $\alpha = 0,0027$

Regras Utilizadas	Novo Valor para $k$
C <sub>1</sub>	3,0000
C <sub>1</sub> e C <sub>2</sub>	3,1274
C <sub>1</sub> e C <sub>3</sub>	3,3492
C <sub>1</sub> e C <sub>4</sub>	3,1072
C <sub>1</sub> e C <sub>5</sub>	-----
C <sub>1</sub> e C <sub>6</sub>	3,1316

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Detecção de Mudanças

- Para combinação C<sub>1</sub> e C<sub>3</sub>, com

$$\sqrt{n} = 4; \delta = 0,60; w = 2 \text{ e } k = 3,3492$$

√ Probabilidade abaixo do nível de alerta:

$$\begin{aligned} a_1 &= P\{X < \mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} \mid \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 0,8\} \\ &= 0,78814 \end{aligned}$$

√ Probabilidade entre nível de alerta e controle

$$\begin{aligned} a_2 &= P\{\mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} < X < \mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} \mid \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{0,8 < Z < 2,15\} \\ &= 0,1961 \end{aligned}$$

√ M: qte. de amostras até sinal

$$E_{+\delta}(M) = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \approx 15$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Similarmente para  $\delta = -0,60$

√ Probabilidades  $a_1$  e  $a_2$ :

$$a_1 = P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 3,8\}$$

$$= 0,999931$$

$$a_2 = P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{3,8 < Z < 4,55\}$$

$$= 0,00069$$

√ M: Quantidade de amostras até o sinal

$$E_{-\delta}(M) = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \approx 1449$$

√ CMS1: Quantidade média de amostras até o sinal

$$CMS_1 = \left[ \frac{1}{E_{+\delta}(M)} + \frac{1}{E_{-\delta}(M)} \right]^{-1} \approx 15$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Combinação de Regras – CMS<sub>1</sub> (n = 4)

$\delta$	$C_1$	$C_1$ e $C_2$	$C_1$ e $C_3$	$C_1$ e $C_4$	$C_1$ e $C_6$
0,00	370,0	370,0	370,0	370,0	370,0
0,20	199,0	166,0	147,0	148,0	<b>120,0</b>
0,40	71,6	49,7	41,3	40,1	<b>33,8</b>
0,60	27,8	17,9	15,0	<b>14,3</b>	15,2
0,80	12,4	8,0	7,0	<b>6,8</b>	9,1
1,00	6,3	4,4	<b>4,1</b>	4,1	6,1
1,20	3,7	2,8	<b>2,8</b>	2,8	4,0
1,40	2,4	<b>2,0</b>	2,1	2,2	2,7
1,60	1,7	<b>1,6</b>	1,7	1,7	1,9
1,80	1,4	<b>1,4</b>	1,5	1,4	1,5
2,00	<b>1,2</b>	1,2	1,3	1,2	1,2

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Comentários:

√  $C_1$  e  $C_6$ : ágil na detecção de pequenas perturbações na média;

√  $C_1$  e  $C_2$ : praticamente sempre mais ágil que o gráfico de controle  $3\sigma$  tradicional ( $C_1$  isolada).

√ Para manutenção do o nível de proteção contra alarmes falsos, deve-se alargar os limites de controle.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Planejamento dos Gráficos de Controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Planejamento de Gráfico de Controle

- Parâmetros de planejamento:
  - √ k: abertura dos limites de controle
  - √ n: tamanho da amostra
  - √ h: intervalo entre as amostras

---

---

---

---

---

---

---

---

### Abordagens de planejamento

- √ Planejamento estatístico:
  - minimização do número de alarmes falsos
  - maximização da capacidade de detectar mudanças
- √ Planejamento econômico:
  - Minimização do custo esperado do sistema de controle
  - Custos:
    - amostragem
    - envio não conformes ao mercado
    - custos de ajuste
    - etc.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras

---

---

---

---

---

---

---

---

### Intervalo de Tempo entre Amostras ( $h$ )

- É função de:
  - √ tempo de produção de cada item;
  - √ custo da inspeção;
  - √ tempo de inspeção;
  - √ estabilidade do processo;
  - √ custo de operar sob causa especial.

---

---

---

---

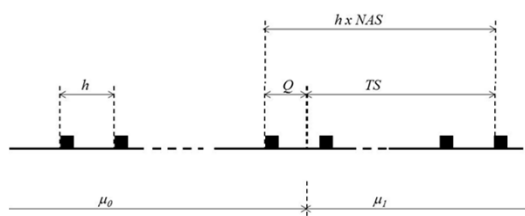
---

---

---

---

### Tempo até o Sinal



■ Pontos de inspeção

- √ TS: Tempo até o sinal
- √ NAS: número de amostras até o sinal
- √ Q: tempo entre o desajuste a última inspeção (anterior)
- √ h: intervalo entre amostragens (fixo)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Determinação dos Parâmetros Ótimos

- √ TA: tempo entre alteração e alarme (TA)  
(medida de eficiência)
- √ NAS: número de amostras até o sinal
- √ Q: tempo entre a última amostragem e perturbação

$$TA = h \text{ NAS} - Q$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- √ TMA<sub>1</sub>: tempo esperado até alarme verdadeiro  
TMA<sub>1</sub> = E(TA) = E(hNAS - Q)

- Depende de δ, n, h e k

- √ Suposição:

- perturbação ocorre ao acaso em intervalo entre amostras

$$E(Q) = h/2$$

$$TMA_1 = h \text{ CMS} - \frac{h}{2} = h \left( \frac{1}{P_d} - \frac{1}{2} \right)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- √ Parâmetros do gráfico de  $\bar{X}$ :

k = 3 (α = 0,0027) e δ = 1,5

n	h (h)	P <sub>d</sub>	CMS	TMA		n/h (am./h)
				(h)	(min)	
2	0,50	0,19	5,26	2,38	143	4
	0,25	0,19	5,26	1,19	72	8
4	0,50	0,50	2,00	0,75	45	8

- √ P<sub>d</sub>: Poder (valores na Tabela 3.7)

- √ n/h: taxa horária de amostragem

$$TMA_1 = (0,5)(5,26) - \frac{0,5}{2} = 2,38 \text{ horas}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Comentários:**

- √ É conveniente usar o  $TMA_1$  como medida de rapidez
  - Fixados previamente  $CMS_0$  e a taxa de amostragem ( $n/h$ );
- √ Há uma infinidade de combinações de  $(n, h, k)$  com mesmo mesmo tempo médio até alarme falso ( $TMA_0$ )
  - $TMA_0 = h/\alpha$
- √ Uma das combinações minimiza o tempo esperado até o sinal ( $TMA_1$ ).

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo**

- Sejam  $n/h = 8$ ,  $TMA_0 = 500$  e  $\delta = 1, 5$ 
  - √ Qual a melhor combinação de  $(n, h)$  dentre: (2; 0, 25), (4; 0, 50), (8; 1, 00) e (16; 2, 00) ?

1. Para cada  $h$ , determina-se  $k$ :

$$\alpha = 2 \Phi(-k) \quad k = -\Phi^{-1}\left(\frac{h}{2 TMA_0}\right)$$

2. Determinação do poder:

$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

3. Cálculo tempo médio até alarme:

$$TMA_1 = h \left( \frac{1}{P_d} - \frac{1}{2} \right)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- 4. Busca-se uma combinação de  $(n, h, k)$  que minimize o tempo esperado até o sinal ( $TMA_1$ )
  - Fixam-se o tempo médio até alarme falso ( $TMA_0 = h/\alpha$ ) e a taxa de amostragem ( $n/h$ ),

---

---

---

---

---

---

---

---

• Determinação de parâmetros ótimos Gráfico  $\bar{X}$ :

Determinação dos Parâmetros do Gráfico de Controle X-Barra			
Entrada		Saída	
n =	2	k =	3,481
h =	0,25 horas	Poder =	0,087
TMA <sub>0</sub> =	500 minutos	n/h =	8,000
DELTA =	1,5		
		CMS <sub>1</sub> =	11,494
		TMA <sub>1</sub> =	2,748 horas
		TMA <sub>1</sub> =	2,000 horas e 44,905 minutos

$$k = \Phi^{-1}\left(\frac{0,25}{2 \times 500}\right) = 3,481$$

$$P_d = P\{Z < -3,481 + 1,5\sqrt{2}\} + P\{Z < -3,481 - 1,5\sqrt{2}\} = 0,087$$

$$n/h = \frac{2}{0,25} = 8 \text{ amostras por hora}$$

$$CMS_1 = \frac{1}{0,087} = 11,494 \text{ amostras até sinal}$$

$$TMA_1 = \frac{0,25}{0,087} - \frac{0,25}{2} = 2,748 \text{ horas}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Tempo esperado até o sinal

√ Para  $n/h = 8$  amostras/hora e  $TMA_0 = 500$

$\delta$	n=2; h=0,25		n=4; h=0,50		n=8; h=1,00		n=16; h=2,00	
	k=3,48		k=3,29		k=3,09		k=2,88	
	h	min.	h	min.	h	min.	h	min.
0,50	89	38	45	11	20	50	9	32
0,75	32	6	13	23	5	31	2	39
1,00	12	46	4	50	2	1	1	18
1,25	5	39	2	5	0	59	1	2
1,50	2	45	1	3	0	39	1	0
2,00	0	51	0	24	0	30	1	0

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Comentários**

• Entrada:  $n/h = 8$  amostras/hora e  $TMA_0 = 500$

- √ Para detectar pequenos deslocamentos ( $\delta \leq 1$ )  
trabalhar com amostras grandes ( $n = 16$ ) e intervalos de amostragem longos ( $h = 2$  horas);
- √ Para deslocamentos moderados ( $1 < \delta \leq 1,5$ )  
trabalhar com  $n = 8$  e intervalos  $h = 1$  hora;
- √ Para grandes deslocamentos ( $\delta > 1,5$ )  
Trabalhar com  $n = 4$  e intervalos  $h = 30$  min

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Planejamento Estatístico – Resumo

- Para definição do tamanho da amostra ( $n$ ) e frequência de amostragem ( $h$ )
  - √ Magnitude da mudança no processo a ser detectada
  - √ Rapidez desejada para detectar essa mudança
- Situação ideal (inviável):
  - √ grandes amostras tomadas mais frequentemente  
 $n$  grande e  $h$  pequeno
- Prática adequada:
  - √ pequenas amostras em intervalos de tempo menores
    - mais usada em indústrias
  - √ grandes amostras em intervalos de tempo maiores

---

---

---

---

---

---

---

---

### Intervalo de Tempo entre Amostras

- É função de:
  - √ tempo de produção de cada item;
  - √ custo da inspeção;
  - √ tempo de inspeção;
  - √ estabilidade do processo;
  - √ custo de operar sob causa especial.

---

---

---

---

---

---

---

---

- Problemas:
  - √ obtenção de valores precisos para estes parâmetros;
  - √ estabilidade do processo está associada ao tempo médio isento de causas especiais;
  - √ operação sob causa especial implica aumento da PFE, dependendo da intensidade da perturbação.
  - √ Valores pequenos de  $h$  implicam custos elevados com amostragem e maior incidência de alarmes falsos.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Conclusão

---

---

---

---

---

---

---

---

## Tipos de Cartas de Controle

Classificação	Critério de diferenciação
Unilateral/multilateral	Número de limites de controle
Shewhart clássica/modificada	Procedimento de cálculo dos limites de controle
Controle único/duplo	Número de estatísticas amostrais para uma característica de qualidade
Univariada/multivariada	Quantidade de características de qualidade monitorada por uma carta
Variáveis/atributo	Tipo de distribuição da estatística amostral
Sem memória/com memória	Consideração dos resultados amostrais anteriores

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cartas de Controle de Shewhart – Variável

- Gráfico de  $\bar{X}$  (ou de  $\tilde{X}$ ):
  - √ Estatística de teste: média amostral (ou mediana amostral)
  - √ Monitoramento do nível do processo
- Gráfico de R (ou de S):
  - √ Estatística de teste: amplitude amostral (ou desvio padrão amostral)
  - √ Monitoramento da dispersão do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

- Gráfico de valor extremo:
  - √ Todas os elementos do vetor amostral (observações individuais) são plotados no gráfico
  - √ Monitoramento tanto da locação quanto da dispersão
  - √ Desempenho questionável quando comparado com as cartas especializadas
    - Únicos elementos de importância do vetor amostral são o máximo e o mínimo

---

---

---

---

---

---

---

---

### Cartas de Controle de Shewhart – Atributo

- Gráfico de C (ou np):
  - √ Estatística de teste: quantidade de não conformidades por unidade amostral (ou unidades amostrais não conformes)
- Gráfico de p:
  - √ Estatística de teste: proporção de unidades não conformes
- Gráfico de u:
  - √ Estatística de teste: não conformidades por unidade amostral

---

---

---

---

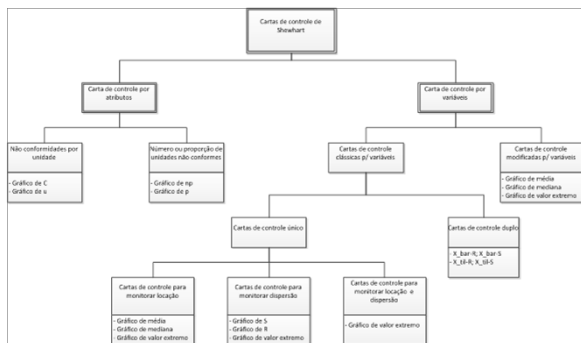
---

---

---

---

### • Cartas de Controle de Shewhart




---

---

---

---

---

---

---

---

**Referências**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bibliografia Recomendada**

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.

---

---

---

---

---

---

---

---